

**Algumas propriedades de alocações  
para o processo pontual de Poisson**

Daniel Andrés Díaz Pachón

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística  
Orientador: Prof. Dr. Serguei Popov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio  
financeiro da CAPES

São Paulo, julho de 2009

# Algumas propriedades de alocações para o processo pontual de Poisson

Este exemplar corresponde à redação  
final da tese devidamente corrigida  
e defendida por Daniel Andrés Díaz Pachón  
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Serguei Popov (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Fabio Machado - IME-USP.
- Prof. Dr. Marcelo Freire - EACH-USP.
- Prof. Dr. Miguel Abadi - IMECC-Unicamp.
- Prof. Dr. Fernando Piguard - FFCLRP-USP.

*To Bill, “my good friend and colleague”,  
thank you for all the inspiration.  
If I am right here and right now it is just because of  
the incredible influence of your thought and ideas on me.*

# Agradecimentos

A maioria das pessoas tem pouco para dizer neste ponto, na verdade esse não é o meu caso. Agradeço a Deus. Quero agradecer ao professor Serguei, a quem realmente admiro, mas quem também me orientou muito além das matemáticas que aparecem na tese; eu agradeço a sua paciência e a sua confiança a pesar das minhas dificuldades, mas principalmente estou muito agradecido por ter-me dado ânimos quando eu quis parar. Quero agradecer também à minha família e à Andrea pelo apoio que recebi de vocês em todos os sentidos e de todas as formas; gostaria de dizer muitas coisas, mas o português e até o espanhol conjuntamente não são suficientes; só sei que não teria conseguido absolutamente nada sem vocês; eu sempre vou ver os nomes de todos vocês no meu diploma. Manuel e Martha Díaz também têm um lugar especial aqui, agradeço o seu apoio moral e a sua ajuda financeira quando precisei dela. Não posso deixar de mencionar ao meu amigo Juan Pablo e a sua família (especialmente à Lupe), obrigado pelo apoio, pela força moral que me deram; obrigado Juan pela confiança em mim ainda quando já nem eu acreditava. Quero agradecer ao Esteban Fernández por todo o apoio recebido quando foi presidente da Editorial Vida. Agradeço à Thais e a sua família por todo o apoio durante a período difícil do assalto. Finalmente, Marcela, obrigado; o último capítulo não teria sido desenvolvido se você não tivesse aparecido: você me salvou da minha própria mediocridade.

# Resumo

Neste trabalho generaliza-se o chamado casamento estável de Poisson e Lebesgue para o caso de apetite aleatório. Estudam-se propriedades inerentes ao modelo como a existência e unicidade quase certa das alocações quando as funções de alocação vão num processo pontual ergódico, entre outras. Estudam-se também propriedades de percolação sobre a existência da fase sub-crítica e obtêm-se limites superiores polinomiais nas fases súper-crítica e sub-crítica do modelo.

**Palavras-chave:** Alocações estáveis, processo pontual de Poisson, apetite aleatório, percolação, grandes desvios.

# Abstract

We generalize some properties of the so-called stable marriage of Poisson and Lebesgue when the appetites are random. We study some properties, like its existence and almost sure uniqueness when the underlying process is an ergodic one, among others. We also study important percolation properties related to the existence of the subcritical phase, and we get upper polynomial bounds for the distance of a typical point to its centre on the subcritical and supercritical phases.

**Keywords:** Stable allocations, Poisson point process, random appetite, percolation, large deviations.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	História . . . . .	1
1.2	Descrição . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Propriedades do modelo PLA</b>	<b>8</b>
2.1	Construção . . . . .	8
2.2	Existência . . . . .	10
2.3	Unicidade quase certa . . . . .	13
2.4	Transições de fase . . . . .	20
2.5	Monotonicidade . . . . .	22
2.6	Geometria . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Percolação</b>	<b>31</b>
3.1	Método de Freire, Popov e Vachkovskaia . . . . .	31
3.2	Método de Gouéré . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Caudas</b>	<b>52</b>
4.1	Cota crítica em dimensão 1 . . . . .	52
4.2	Caudas explícitas . . . . .	56
4.3	Cota supercrítica . . . . .	60
4.4	Cota subcrítica . . . . .	67

# Capítulo 1

## Introdução

Neste primeiro capítulo introdutório vai-se apresentar uma breve história do modelo a ser estudado para depois terminar de forma mais simples com uma descrição de dito modelo.

### 1.1 História

Em [16], Robinson tentou explicar para uma audiência não matemática os interessantes desenhos que surgiram das simulações sobre o modelo chamado de “Casamento estável de Poisson e Lebesgue” (a Figura 1.1, gerada por Peres, Hoffman e Holroyd em [7]). Nessa explicação, Robinson fez um breve resumo histórico que será a base desta introdução com a diferença que aqui vai se aprofundar mais nos conceitos matemáticos.

Poderia se dizer que a história do casamento estável de Poisson e Lebesgue é a história das tentativas por escolher um ponto típico num processo pontual ergódico  $\Pi$ . Para esses casos, usualmente é usada  $\Pi^*$ , a versão de Palm do processo (um processo com a lei do processo original condicionado a ter um ponto na origem), e toma-se o ponto na origem como típico.

Assim, o começo do casamento estável de Poisson e Lebesgue pode-se situar no artigo de Thorisson publicado em 1996 ([17]). Neste artigo Thorisson provou que existe um *shift coupling* de  $\Pi$  e  $\Pi^*$ . Isto é: pode-se selecionar um ponto  $Y$  de  $\Pi$  tal que trasladar  $\Pi$  por  $-Y$  produz uma configuração com a lei de  $\Pi^*$ . A prova de Thorisson foi feita em termos abstratos de teoria



Figura 1.1: Alocações estáveis a um processo de Poisson.

da medida, mas a pergunta que então surgia era como encontrar uma lei determinística para escolher o ponto típico.

A modo de exemplo, considere-se uma medida  $\mu$  ergódica e invariante por translações na  $\sigma$ -álgebra produto de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ . Note-se que o espaço  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  pode-se ver como o espaço de lançamentos de moeda em cada ponto de  $\mathbb{Z}^d$ . Para o caso  $d = 1$ , Thomas Liggett provou construtivamente em [13] que é possível encontrar um ponto (aleatório)  $X$  tal que ao trasladar  $X$  à origem, o novo processo tem lei  $\mu^*$ .

Para ilustrar a ideia de Liggett, suponha-se que uma moeda honesta é jogada em cada ponto de  $\mathbb{Z}$ , então o  $X$  com a propriedade desejada é aquele que tem tantas caras quanto coroas entre ele e a origem (a Figura 1.2 ilustra com um exemplo o conceito: em  $z = 7$  têm-se o mesmo número de caras e de

coroas entre esse ponto e a origem). Mais geralmente: ao jogar uma moeda em cada ponto de  $\mathbb{Z}$  com probabilidade  $p$  de obter cara e  $1/p \in \mathbb{Z}$ , se tem-se  $|X + 1|p$  caras (contando a origem) entre  $X$  e a origem, então ao trasladar o processo por  $-X$ , a nova sequencia tem lei  $\mu^*$ , onde  $\mu^*$  é a versão de Palm da medida  $\mu$ .

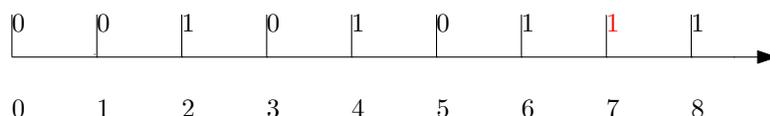


Figura 1.2: 1 representa cara e 0 representa coroa

Surge então uma pergunta natural: qual é a distância de  $X$  à origem? No mesmo artigo, Liggett provou que  $\mathbf{E}|X|^{1/2} = \infty$  e que  $\mathbf{P}[|X| \geq x]$  tem cauda de ordem  $Cx^{-1/2}$  para  $d = 1$ . Em [9] Holroyd e Liggett continuaram a provar resultados adicionais das caudas para campos aleatórios Bernoulli e Poisson em finitas dimensões: mostraram que a cauda de  $\mathbf{P}[|X| \geq x]$  é da ordem de  $C_1x^{-1/2}$  para todo  $d \geq 1$ . Além disso, também provaram que  $\mathbf{E}|X| = \infty$  para o caso  $d = 2$  em campos Bernoulli e Poisson (A definição de  $X \in \mathbb{Z}^d$  estende-se naturalmente: um ponto aleatório tal que, como no caso  $d = 1$ , ao trasladar o processo por  $-X$ , o novo processo tem lei  $\mu^*$ , onde  $\mu$  é a lei do processo original).

O anterior responde as perguntas sobre a otimalidade das caudas de  $|X|$  para  $d = 1$  e  $d = 2$  (tem-se cotas inferiores e superiores). Mas que acontece com as caudas de  $|X|$  quando  $d \geq 3$ ? Em [11] Holroyd e Peres continuaram com os avanços: provaram que  $\mathbf{E} \exp C_2|X|^d < \infty$  para campos Bernoulli quando  $d \geq 3$ . Além disso, também mostraram que  $X$  existe em função de  $\mu$  se e só se  $1/p \in \mathbb{Z}$ .

Ainda mais, em [9] o resultado para campos Bernoulli em  $\mathbb{Z}^d$  foi usado para provar o resultado em campos de Poisson em  $\mathbb{R}^d$  pela aproximação da distribuição binomial à de Poisson. Agora em [11] proporcionava-se uma forma mais clara para encontrar o ponto  $X$  num processo pontual em  $\mathbb{R}^d$ : o algoritmo do casamento estável de Gale-Shapley proposto em [4].

Em palavras simples, conforme aos interesses desta introdução, trata-se de um algoritmo *greedy* em que cada ponto de um processo de Poisson com intensidade 1 faz crescer uma bola centrada nele; essa bola vai pegando todo território que não pertença a nenhum outro centro até alcançar um volume de uma unidade (para a definição formal mais geral veja-se a seguinte seção deste capítulo).

Então, pode-se intuir que quase todo  $\mathbb{R}^d$  vai ser *alocado* a um ponto de Poisson; em particular, a origem vai ser alocada a um ponto  $Y$  do processo (isto vai-se provar de forma mais geral no segundo capítulo deste trabalho). Assim, Holroyd e Peres provaram que, ao trasladar todo o processo pontual por  $-Y$ , obtém-se um novo processo com a lei da versão de Palm do processo original. Foi esse modelo o simulado para obter a Figura 1.1.

Que acontece quando os pontos querem território com volume menor ou maior que 1? Nesse caso, podem-se intuir transições de fase com ponto crítico quando cada centro quer pegar uma unidade de volume. Holroyd e Peres e Hoffman, provaram formalmente esse resultado e estudaram outras propriedades do modelo em [7]. Mas surgem perguntas interessantes:

1. Percolação: Quando os centros querem território maior ou igual a 1, o território alocado aos centros percola (a componente da origem tem volume infinito). Mas será que existe um volume de território  $v_c$  menor que 1 tal que a componente da origem não é infinita para todo volume menor que  $v_c$ ? Freire, Popov e Vachkovskaia provaram em [3] que esse  $v_c$  existe.

2. Grandes desvios: Lembrando o começo do modelo, a pergunta da distância de  $Y$  à origem ainda é importante e interessante quando o processo é Poisson. Holroyd, Hoffman e Peres provaram em [8] alguns resultados interessantes sobre a cauda da distribuição de  $|Y|$  que foram fortalecidos em um artigo posterior por Holroyd, Pemantle, Peres e Schramm ([10]). Precisamente em [10] prova-se de forma muito elegante (usando o teorema central do limite e dois tipos de processo de Poisson) que  $\mathbf{E}Y^{d/2} = \infty$  quando  $d = 1$  ou  $d = 2$ , um resultado que já tinha-se obtido em [11] de forma muito complexa usando resultados de [13] e [9].

3. Território conectado de cada centro. Se todo centro quer pegar uma unidade de volume de território, é possível gerar território para cada centro

do processo de forma que esse território esteja conectado, ainda que o território assim gerado não vai satisfazer a propriedade de estabilidade? Em [12] Krikun provou que isso é possível para  $\mathbb{R}^2$ . O resultado foi logo generalizado para qualquer dimensão por Chatterjee, Peled, Peres e Romik em [2] e mais recentemente em [1].

Ainda que tem-se obtido importantes resultados, o trabalho desenvolvido nesta tese parece ser a primeira vez na qual se consideram alocações de volume aleatório. Assim, o interesse deste trabalho é estudar algumas propriedades do modelo para a generalização proposta, principalmente de percolação e grandes desvios.

## 1.2 Descrição

Em [7] e [8] o seguinte modelo foi considerado, este trabalho adiciona a aleatorização do parâmetro chamado de *apetite*, que no modelo original era constante.

**Definição 1.1 (Centros e lugares).** O conjunto de **centros**  $\Xi$  em  $\mathbb{R}^d$ , com  $d \geq 1$ , é um conjunto discreto de pontos (cada elemento  $\xi \in \Xi$  tem uma vizinhança  $S \subset \mathbb{R}^d$  tal que  $S \cap \Xi = \{\xi\}$ ) não necessariamente aleatório. Os elementos  $x \in \mathbb{R}^d$  vão se chamar de **lugares**.

**Definição 1.2 (Apetite aleatório).** Seja  $\{\alpha_\xi\}_{\xi \in \Xi}$  uma coleção de v.a. *iid* distribuídas como  $\alpha$ , com distribuição comum  $F$ . Cada  $\alpha_\xi$  vai ser o **apetite** (aleatório) do centro  $\xi$ .

**Definição 1.3 (Alocação).** Considere-se a norma euclidiana  $|\cdot|$  e a medida de Lebesgue ou **volume** em  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{L}$ . Uma função  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \Xi \cup \{\infty, \Delta\}$  que satisfaz as seguintes três características será chamada uma **alocação**:

- $\mathcal{L}[\psi^{-1}(\xi)] \leq \alpha_\xi$  para todo  $\xi \in \Xi$ . Caso  $\mathcal{L}[\psi^{-1}(\xi)] < \alpha_\xi$  vai se dizer que o centro  $\xi$  ficou **insatisfeito**; caso  $\mathcal{L}[\psi^{-1}(\xi)] = \alpha_\xi$  diz-se que o centro  $\xi$  ficou **satisfeito**.

- $\mathcal{L}[\psi^{-1}(\Delta)] = 0$ .  $\psi^{-1}(\Delta)$  é um conjunto de lugares que se considera por conveniência técnica.
- $\psi^{-1}(\infty) = \{x \in \mathbb{R}^d : x \notin \psi^{-1}(\Xi) \cup \psi^{-1}(\Delta)\}$ . Suponha-se um lugar  $x \notin \psi^{-1}(\Delta)$ , então vai-se dizer que  $x$  é **reclamado** caso  $\psi(x) = \xi$  para algum  $\xi \in \Xi$  e vai-se dizer que  $x$  é **não reclamado** caso  $\psi(x) = \infty$ .

Chame-se  $\psi^{-1}(\xi)$  de **território** do centro  $\xi$ , para  $\xi \in \Xi$ . Em palavras simples, a função de alocação  $\psi$  tenta fazer  $\mathcal{L}$ -q.t. lugar  $x \in \mathbb{R}^d$  parte do território de algum centro  $\xi$  (alocar  $x$  a um centro  $\xi$ ), se a função não conseguiu esse objetivo, ela vai enviar o ponto  $x$  ao elemento  $\infty$  do conjunto de chegada. Chama-se de  $\mathcal{C}$  ao fecho do conjunto dos lugares reclamados  $\psi^{-1}(\Xi)$ .

**Definição 1.4 (Estabilidade).** Seja  $\xi$  um centro e seja  $x$  um lugar com  $\psi(x) \notin \{\xi, \Delta\}$ .

- $x$  **deseja** ao  $\xi$  se  $|x - \xi| < |x - \psi(x)|$  ou  $x$  é não reclamado.
- $\xi$  **cobiça** ao  $x$  se  $|x - \xi| < |x' - \xi|$  para algum  $x' \in \psi^{-1}(\xi)$  ou quando o  $\xi$  fica insatisfeito.

Um par  $(x, \xi)$  é **instável** para a alocação  $\psi$  se  $x$  deseja a  $\xi$  e  $\xi$  cobiça a  $x$ . A alocação será **estável** quando nenhum par for instável.

Usualmente, os centros serão pontos de um processo de Poisson, então faz sentido referir-se ao modelo aqui apresentado como **PLA** (pelas iniciais do casamento estável de Poisson e Lebesgue [com apetite] aleatório). **PL** será o modelo padrão como foi apresentado em [7] e trabalhado em [8].

Finalmente imagine que um pesquisador está interessado na área ocupada por gotas de água (ou algum outro líquido) que caem numa superfície plana, o qual é um caso comum na física e na engenharia, então o modelo PL descreve melhor a situação do que o Modelo Booleano (MB) posto que duas gotas não podem ocupar a mesma área. Ainda mais, o modelo PLA é uma generalização muito interessante levando em conta que na realidade duas gotas não vão ter o mesmo volume (pense, por exemplo, em gotas de

chuva).

No exemplo  $d = 2$ , mas  $d = 3$  é importante também na física, na engenharia e até na cosmologia como sugerem os artigos [2] e [1]. Além disso, na parte teórica, os probabilistas podem estar interessados em encontrar resultados para qualquer  $d$  e para  $d \rightarrow \infty$ .

O objetivo deste trabalho é generalizar alguns resultados importantes para o caso de apetites aleatórios. Vai se fazer uma construção abstrata mostrando que é possível gerar o modelo PLA de forma que satisfaça propriedades ergódicas e vão se provar resultados de existência, transições de fase, geometria dos territórios, percolação e grandes desvios, principalmente.

# Capítulo 2

## Propriedades do modelo PLA

Neste capítulo vão-se dar algumas propriedades do modelo PLA, como a construção em medida do modelo, a demonstração da existência explícita de uma alocação estável, a unicidade quase certa das alocações estáveis quando o conjunto de centros é escolhido por um processo pontual ergódico, algumas propriedades de monotonicidade e da geometria do modelo. Elas ajudaram a ter uma visão mais clara do funcionamento geral do casamento estável de Poisson e Lebesgue com apetite aleatório.

### 2.1 Construção

Nessa seção vai-se mostrar a construção do modelo PLA de forma que a notação usada acima para o apetite aleatório (isto é  $\alpha_\xi$ ) não apresente problemas para o uso das propriedades ergódicas. Ou seja, além da notação,  $\alpha_\xi$  não depende do centro  $\xi$  (nem de outros apetites).

Seja  $\Pi$  um processo pontual (usualmente um processo pontual de Poisson) do espaço de probabilidade  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$  no espaço mensurável  $(N, \mathcal{N})$ , onde  $N$  é o conjunto de todas as medidas de contagem que assinam medida finita a conjuntos limitados na  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}^d$  de  $\mathbb{R}^d$  e  $\mathcal{N}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos conjuntos da forma

$$\{n \in N : n(A) = k\}$$

onde  $A \in \mathcal{B}^d$  e  $k \in \mathbb{N}$ . A distribuição de  $\Pi$  é a medida  $\mathbf{P}_1$  em  $\mathcal{N}$  induzida por  $\Pi$ , ou seja:  $\mathbf{P}_1(G) = \mathbb{P}(\Pi^{-1}(G))$ , para todo  $G \in \mathcal{N}$ .

Defina-se  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$  com

$$\Omega_2 = \prod_{n \in \mathbb{N}} \prod_{z \in \mathbb{Z}^d} [0, \infty),$$

$\mathcal{F}_2$  a  $\sigma$ -álgebra produto e  $\mathbb{P}_2$  uma medida produto cujas marginais têm distribuição  $\mathbf{P}_2$  em  $[0, \infty)$ . Os elementos  $\omega_2 \in \Omega_2$  denotam-se  $\omega_2(n, z)$ . Finalmente, define-se  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , onde  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  e  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ . Assim, o modelo PLA pode ser definido como uma função mensurável de  $\Omega$  em  $N \times \Omega_2$ :  $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (X(\omega_1), \omega_2)$ . Definem-se os **cubos binários de ordem  $n$** ,  $K(n, z)$ :

$$K(n, z) := \prod_{i=1}^d (z_i 2^{-n}, (z_i + 1) 2^{-n}], \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{Z}^d.$$

Pode-se ver com facilidade que cada centro  $\xi \in \Pi$  está contido em um único cubo binário de ordem  $n$ ,  $K(n, z(n, \xi))$ , onde  $z(n, \xi)$  é um inteiro que depende do centro e da ordem do cubo. Pode-se ver também que  $\mathbb{P}_1$ -q.c., para cada ponto  $\xi \in \Pi$  existe  $n_0(\xi) := n_0$  definido como

$$n_0 = \inf \{n \in \mathbb{N} : K(n, z(n, \xi)) \text{ não contem outros pontos } \xi' \in \Pi\}.$$

Finalmente, define-se  $\alpha_\xi$ , o apetite do centro  $\xi$ , como  $\omega_2(n_0, z(n_0, \xi))$ . Construída dessa forma, a estrutura produto de  $\Omega$  implica a independência dos apetites respeito ao processo pontual e a estrutura produto de  $\Omega_2$  implica que diferentes centros tem apetites independentes com distribuição  $\mathbf{P}_2$ . Assim, as independências garantam a ergodicidade do modelo PLA (que eventos invariantes por translações têm probabilidade 1 ou 0. Veja-se a seção 2.1 (pp. 21-28) de [14]).

Essencialmente, essa construção imita a construção proposta em [14] (pp. 16-17) para o modelo Booleano, com a única diferença de que  $\Omega_2$  foi lá construída para os raios; aqui  $\Omega_2$  é considerada para os apetites. Claramente,

se os centros ou os apetites não são aleatórios a construção se simplifica. É importante ter feito a construção em medida no começo pois daqui para o frente vai-se seguir a notação usada nesta seção.

## 2.2 Existência

Nesta seção vai-se provar explicitamente a existência de uma função de alocação estável. Ainda mais, a prova é construtiva no sentido de que ela apresentará a própria alocação.

**Teorema 2.1.** Para qualquer conjunto discreto de centros  $\Xi \in \mathbb{R}^d$ , com apetite aleatório  $\alpha$  e realização do apetite  $\alpha_\xi$  para todo centro  $\xi \in \Xi$ , existe uma alocação estável  $\mathbf{P}_2$ -q.c.

**Definição 2.1 (Algoritmo Gale-Shapley Ótimo para os Lugares).** Seja  $\Delta$  definido como no capítulo 1. Construa-se  $\psi$  usando uma seqüência de etapas. Para cada inteiro positivo  $n$ , a **etapa**  $n$  consiste de duas partes, como segue:

- (a) Cada lugar  $x \notin \Delta$  aplica ao centro que esteja mais perto de  $x$  e que não tenha rejeitado ao  $x$  em nenhuma das etapas anteriores.
- (b) Para cada centro  $\xi$ , seja  $A_n(\xi)$  o conjunto de lugares os quais aplicaram ao  $\xi$  na etapa  $n$  (a), e defina o **raio de rejeição**

$$r_n(\xi) = \inf \{r : \mathcal{L}(A_n(\xi) \cap B(\xi, r)) \geq \alpha_\xi\}$$

onde o ínfimo do conjunto vazio é  $\infty$  e  $B(\xi, r)$  é a bola de centro em  $\xi$  e raio  $r$ . Então o  $\xi$  **alista** todos os lugares em  $A_n(\xi) \cap B(\xi, r_n(\xi))$  e **rejeita** todos os lugares de  $A_n(\xi) \setminus B(\xi, r_n(\xi))$ .

Considere-se um lugar  $x \notin \Delta$ . Posto que  $\Xi$  é discreto, o seguinte é claro: ou  $x$  é rejeitado por todo centro (em ordem da distância crescente de  $x$ ) ou, para algum centro  $\xi$  e alguma etapa  $n$ ,  $x$  é alistado por  $\xi$  em toda etapa depois

de  $n$ . No primeiro caso nos fazemos  $\psi(x) = \infty$  (então  $x$  é não reclamado); no segundo caso fazemos  $\psi(x) = \xi$ .

*Demonstração do Teorema 2.1.* Seja  $\psi$  construído de acordo com o algoritmo Gale- Shapley (GS) ótimo para os lugares. Primeiro checka-se que  $\psi$  seja uma alocação: Seja  $S_n(\xi)$  o conjunto dos lugares alistados pelo centro  $\xi$  na etapa  $n$ . Pela construção em (b) e o teorema do valor intermediário (veja-se o Apêndice) tem-se  $0 \leq \mathcal{L}(S_n(\xi)) \leq \alpha_\xi$ ,  $\mathbf{P}_2$ - q.c. Mas, pela definição anterior de  $\psi$ , tem-se que  $\psi^{-1}(\xi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(\xi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(\xi)$ , então pelo lema de Fatou (veja-se o Apêndice) obtém-se  $\mathcal{L}(\psi^{-1}(\xi)) \leq \alpha_\xi$ ,  $\mathbf{P}_2$ -q.c. Note-se também que se o centro  $\xi$  rejeita alguma vez um conjunto de lugares (na etapa  $n$ , suponhamos), então  $\mathcal{L}(S_m(\xi)) = \alpha_\xi$  para todas as etapas  $m \geq n$ ,  $\mathbf{P}_2$ -q.c. Assim, um centro não satisfeito nunca vai rejeitar lugar nenhum.

Agora veja-se que  $\psi$  é estável: Considere-se um centro  $\xi$  e um sitio  $x$ . Suponha-se que  $x$  deseja a  $\xi$ . Se  $x$  é não reclamado, então ele foi rejeitado por todos os centros. Do outro lado, se  $x$  é reclamado e  $|x - \xi| < |x - \psi(x)|$ , então o lugar  $x$  aplicou a  $\psi(x)$  em alguma etapa e portanto foi rejeitado pelo centro mais próximo  $\xi$  em alguma etapa anterior. Em qualquer um dos casos,  $\xi$  rejeitou a  $x$ .

Suponha-se agora que  $\xi$  cobiça ao  $x$ . Se  $|x - \xi| < |x' - \xi|$  para algum  $x' \in \psi^{-1}(\xi)$ , então  $\xi$  nunca rejeitou ao  $x'$ , então  $x'$  nunca esteve fora do raio de rejeição de  $\xi$  e idêntica coisa é válida para o  $x$  que fica mais perto. Por outro lado, se o  $\xi$  está insatisfeito então ele nunca rejeitou lugar nenhum. Em qualquer dos casos  $\xi$  não rejeitou ao  $x$ . Deduz-se, como se requeria, que  $(x, \xi)$  não pode ser um par instável. □

Posto que mais para o frente vai-se precisar do seguinte algoritmo, vai-se a apresentar aqui, note-se que uma prova análoga à prova do Teorema 1 pode ser feita para esse algoritmo também.

**Definição 2.2 (Algoritmo GS Ótimo para os Centros).** Para cada inteiro positivo  $n$ , a **etapa  $n$**  consiste das duas partes seguintes:

- (a) Para cada centro  $\xi$ , seja  $R_n(\xi)$  o conjunto de lugares os quais tem rejeitado ao  $\xi$  em uma etapa anterior e defina o **raio de aplicação**

$$a_n(\xi) = \inf \{a : \mathcal{L}(B(\xi, a) \setminus R_n(\xi)) \geq \alpha_\xi\}$$

O centro  $\xi$  **aplica** a cada lugar  $x \in B(\xi, a_n(\xi)) \setminus R_n(\xi) \setminus \Delta$ .

- (b) Cada lugar  $x \notin \Delta$  **alista** o centro que esteja mais por perto daqueles que aplicaram ao  $x$  na etapa  $n$  (a) e **rejeita** qualquer outro centro que tenha aplicado.

Agora vai se descrever  $\psi$ . Considere-se um lugar  $x \notin \Delta$ . Se nenhum centro aplica nunca a  $x$ , então  $\psi(x) = \infty$ . De outra forma, se  $x$  alista algum centro em alguma etapa, então  $x$  alistar\u00e1 este centro ou um mais pr\u00f3ximo em todas as etapas posteriores. Como  $\Xi$  \u00e9 discreto, segue-se que para algum centro  $\xi$  e alguma etapa  $n$ ,  $x$  alista ao  $\xi$  em todas as etapas depois de  $n$ . Nesse caso,  $\psi(x) = \xi$ .

*Demonstra\u00e7\u00e3o alternativa do Teorema 2.1.* Seja  $\psi$  constru\u00eddo de acordo com o algoritmo GS \u00f3timo para os centros. Primeiro checa-se que  $\psi$  \u00e9 uma aloca\u00e7\u00e3o. Seja  $S_n(\xi)$  o conjunto dos lugares que alistaram ao centro  $\xi$  na etapa  $n$ . Pela constru\u00e7\u00e3o em (a) e o teorema do valor intermedi\u00e1rio tem-se que  $0 \leq \mathcal{L}(S_n(\xi)) \leq \alpha_\xi$ ,  $\mathbf{P}_2$ -q.c. Mas, pela defini\u00e7\u00e3o anterior de  $\psi$ , tem-se que  $\psi^{-1}(\xi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(\xi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(\xi)$ , ent\u00e3o  $\mathcal{L}(\psi^{-1}(\xi)) \leq \alpha_\xi$ ,  $\mathbf{P}_2$ -q.c, pelo Lema de Fatou. Observe-se tamb\u00e9m que se um lugar  $x$  rejeita alguma vez um centro  $\xi$  (na etapa  $n$ , suponha-se) \u00e9 porque  $x$  alistou um centro  $\xi'$  tal que  $|\xi' - x| < |\xi - x|$  numa etapa  $m \leq n$ . Assim, um lugar n\u00e3o reclamado nunca vai rejeitar centro nenhum.

$\psi$  \u00e9 est\u00e1vel: Considere-se um centro  $\xi$  e um sitio  $x$ . Suponha que  $x$  deseja a  $\xi$ . Se  $x$  n\u00e3o \u00e9 reclamado, ent\u00e3o nenhum centro aplicou ao  $x$ . Por outro lado, se  $x$  \u00e9 reclamado e  $|x - \xi| < |x - \psi(x)|$ , ent\u00e3o o centro  $\xi$  n\u00e3o aplicou a  $x$  em nenhuma etapa (j\u00e1 estava satisfeito) e portanto  $x$  n\u00e3o rejeito ao centro  $\psi(x)$  em nenhuma etapa anterior. Em qualquer um dos casos  $\xi$  n\u00e3o aplicou ao  $x$ , ent\u00e3o  $\xi$  n\u00e3o cobi\u00e7a ao  $x$ .

Suponha-se agora que  $\xi$  cobiça ao  $x$ . Se  $|x - \xi| < |x' - \xi|$  para algum  $x' \in \psi^{-1}(\xi)$ , então  $\xi$  aplicou ao  $x$  em alguma etapa anterior ou na mesma etapa na que aplicou ao  $x'$ . Por outro lado, se o  $\xi$  está insatisfeito, ele aplicou ao  $x$  em alguma etapa. Em qualquer dos casos  $x$  rejeitou ao  $\xi$ . Ou seja,  $x$  não deseja ao  $\xi$ . Deduzimos, como se requeria, que, mais uma vez,  $(x, \xi)$  não pode ser um par instável.

□

### 2.3 Unicidade quase certa

Considere-se um processo pontual simples invariante por translações  $\Pi$  em  $\mathbb{R}^d$ , com intensidade  $\lambda \in (0, \infty)$  e lei  $\mathbf{P}_1$  e esperança  $\mathbf{E}_1$  (note-se que  $\lambda$  poderia definir-se como  $\mathbf{E}_1[\Pi[0, 1]^d]$ ). O **suporte** de  $\Pi$  é o conjunto aleatório  $[\Pi] = \{z \in \mathbb{R}^d : \Pi(\{z\}) = 1\}$ . Sejam  $\mathbf{P}_2$  e  $\mathbf{E}_2$  a probabilidade e esperança do apetite aleatório  $\alpha$ . E sejam  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{E}$  a probabilidade e esperança conjunta.

**Teorema 2.2 (Unicidade quase certa).** Quando os centros do modelo PLA se escolhem seguindo um processo pontual invariante a translações  $\Pi$  de intensidade finita em  $\mathbb{R}^d$  e cada um dos centros tem escolhido o seu apetite com  $\mathbf{P}_2$ , existe  $\mathbb{P}$ -q.c. uma alocação estável  $\Psi_\Pi$  de  $\mathbb{R}^d$  em  $\Xi = [\Pi]$  para  $\mathcal{L}$ -q.t.  $x \in \mathbb{R}^d$ . Ainda mais,  $\Psi_\Pi$  pode-se escolher como uma alocação de  $\Pi$  mensurável invariante por isometrias.

O esquema da prova de [7] geralmente funciona, com algumas modificações específicas ao apetite aleatório. Para qualquer alocação  $\psi$  e qualquer  $r \in [0, \infty]$ , definam-se as seguintes quantidades. Para qualquer lugar  $x \notin \psi^{-1}(\Delta)$ ,

$$g_x(\psi, r) = \mathbf{1}_{\{|x - \psi(x)| < r\}};$$

e para todo  $\xi \in \Xi$ ,

$$\gamma_\xi(\psi, r) = \mathcal{L}[\psi^{-1}(\xi) \cap B(\xi, r)].$$

O lema seguinte diz que entre todas as alocações estáveis a melhor para os lugares é dada pelo algoritmo GS ótimo para os lugares e a pior é dada pelo algoritmo de GS ótimo para os centros, nos dois casos em termos da distância. Igualmente, vamos provar que a melhor alocação estável para os centros é dada pelo algoritmo GS ótimo para os centros e a pior é dada pelo algoritmo de GS ótimo para os lugares.

**Lema 2.1 (Otimidade).** Fixe-se um conjunto de centros  $\Xi$ , seja  $\psi$  qualquer alocação estável e sejam  $\psi^{GS}$  e  $\psi^{GS_c}$  respectivamente as alocações estáveis GS ótimas para os lugares e para os centros, para o mesmo  $\Xi$ . Para todo  $r \in [0, \infty]$ , temos o seguinte:

1.  $\mathbb{P}$ -q.c., para  $\mathcal{L}$ -q.t. lugar  $x$ ,

$$g_x(\psi^{GS}, r) \geq g_x(\psi, r) \geq g_x(\psi^{GS_c}, r).$$

2.  $\mathbb{P}$ -q.c., para todo centro  $\xi$ ,

$$\gamma_\xi(\psi^{GS_c}, r) \geq \gamma_\xi(\psi, r) \geq \gamma_\xi(\psi^{GS}, r).$$

Para provar o Lema 2.1 precisam-se dos seguintes dois lemas:

**Lema 2.2.** Sejam  $\Xi_0 \subseteq \Xi$  dois conjuntos de centros, sejam  $\alpha_0$  e  $\alpha$  duas v.a. com distribuição  $G$  e  $F$  respectivamente, tais que  $1-G(x) \geq 1-F(x)$  (quando isso acontece, diz-se que  $\alpha$  **domina estocásticamente** a  $\alpha_0$  e denota-se  $\alpha_0 \stackrel{D}{\leq} \alpha$ ). Seja  $\psi$  qualquer uma alocação estável a  $\Xi_0$  com apetite aleatório  $\alpha_0$  e considere o algoritmo GS ótimo para os lugares com apetite aleatório  $\alpha$ . Então,  $F$ -q.c., para  $\mathcal{L}$ -q.t. lugar  $x$ , tem-se que  $\psi(x)$  não rejeita o  $x$ .

*Demonstração.* Como  $\alpha$  domina estocásticamente a  $\alpha_0$ , tem-se que  $G$  é absolutamente contínua com respeito a  $F$  ( $G(\cdot)$  é zero sempre que  $F(\cdot)$  é zero). Assim, pelo teorema de Radon-Nikodym, existe  $f$  integrável tal que  $G(A) = \int_A f dF$ , onde  $A$  está contido numa das componentes mensuráveis do espaço produto  $\Omega_2$  (lembre-se a construção na primeira seção deste capítulo).

Defina  $H^{-1}(u)$  como a *inversa generalizada* de uma função de distribuição  $H$ , ou seja:

$$H^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : H(x) \geq u\}, \quad u \in [0, 1].$$

Seja  $U$  com distribuição uniforme em  $[0, 1]$ , se  $\hat{\alpha}_0 = G^{-1}(U)$  e  $\hat{\alpha} = F^{-1}(U)$  então  $G$ -q.c.  $\hat{\alpha}_0 = \alpha_0$  e  $F$ -q.c.  $\hat{\alpha} = \alpha$ . Além  $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha})$  é um acoplamento de  $\alpha_0$  e  $\alpha$  tal que  $\hat{\alpha}_0 \leq \hat{\alpha}$  (pontualmente). Pelas considerações anteriores o seguinte argumento aplica  $F$ - q.c.

A prova é por redução ao absurdo depois de fazer indução sobre as etapas do algoritmo GS ótimo para os lugares. Suponha-se que a afirmação é falsa e seja  $n$  a primeira etapa na qual não se cumpre. Assim, na etapa  $n$ , algum centro  $\xi \in \Xi_0$  rejeita um conjunto de lugares  $R \subseteq \psi^{-1}(\xi)$  com  $\mathcal{L}R = \varepsilon$ , para algum  $\varepsilon > 0$ . Então, na etapa  $n$ , o centro alistou um conjunto  $A$  com  $\mathcal{L}A = \hat{\alpha}_\xi$  tal que o comprimento  $|a - \xi| < |r - \xi|$  para todo  $a \in A$  e todo  $r \in R$ . Como  $\psi$  é uma alocação, tem-se que  $\mathcal{L}\psi^{-1}(\xi) \leq \hat{\alpha}_0 \leq \hat{\alpha}$ . Logo, existe um conjunto  $D \subseteq A$  disjunto de  $\psi^{-1}(\xi)$  com  $\mathcal{L}D \geq \varepsilon$ . Como  $\xi$  alistou  $A$  na etapa  $n$ , todo  $x \in D$  foi rejeitado nas etapas anteriores por outros centros de  $\Xi$ . Então, pela suposição, para  $\mathcal{L}$ -q.t.  $x \in D$ , tem-se que  $|\psi(x) - x| > |\xi - x|$ , mas isto implica que  $(x, \xi)$  é um par instável. □

Na anterior prova foi usado o fato de que a dominação estocástica implica na existência de um acoplamento com dominação pontual. O recíproco é trivial, logo tem-se uma equivalência. De fato, se  $g$  é uma função crescente e limitada, pode-se trocar a condição de  $\alpha_0 \leq^D \alpha$  pela condição  $\mathbf{E}g(\alpha_0) \leq \mathbf{E}g(\alpha)$ , sob as distribuições  $G$  e  $F$ , respectivamente (veja o capítulo 1.3. de[18]).

**Lema 2.3.** Seja  $\Xi$  um conjunto de centros. Seja  $\alpha$  uma v.a. positiva com distribuição  $F$ , seja  $\psi$  qualquer uma alocação estável a  $\Xi$  com apetite distribuído

como  $\alpha$  e considere o algoritmo GS ótimo para os centros a  $\Xi$  também com apetite  $\alpha$ . Então,  $F$ -q.c., para  $\mathcal{L}$ -q.t. lugar  $x$ ,  $x$  nunca rejeita a  $\psi(x)$ .

*Demonstração.* A prova é por redução ao absurdo depois de fazer indução nas etapas do algoritmo GS ótimo para os centros. Suponha que a afirmação é falsa e seja  $n$  a primeira etapa na qual não se cumpre. Assim, na etapa  $n$ , todos os pontos dum conjunto  $R \subseteq \psi^{-1}(\xi)$  com  $\mathcal{L}R > 0$  rejeitam algum centro  $\xi$  (o qual quer dizer que na etapa  $n$ ,  $\mathcal{L}[(\psi^{GS})^{-1}(\xi)] < \alpha_\xi$ ). Logo cada lugar em  $R$  alistou um centro mais próximo na etapa  $n$ , então pode-se encontrar algum centro  $\xi'$  e um subconjunto  $T \subseteq R$  de medida positiva tal que todo lugar em  $T$  alistou o  $\xi'$ . Em particular,  $\xi'$  aplicou no  $T$  na etapa  $n$ . Agora considere  $\psi^{-1}(\xi')$ . Se todo lugar em  $\psi^{-1}(\xi')$  está mais perto de  $\xi'$  do que  $T$ , então  $\xi'$  foi rejeitado antes por algum subconjunto de medida positiva de  $\psi^{-1}(\xi')$ , o qual contradiz a suposição. Então existe  $x \in R$  e  $y \in \psi^{-1}(\xi')$  com  $|y - \xi'| > |x - \xi'|$ . Mas, nesse caso,  $(x, \xi')$  é um par instável para  $\psi$ .

□

*Demonstração do Lema 2.1.* A primeira desigualdade do item 1 é equivalente a afirmar que,  $\mathbb{P}$ -q.c., para  $\mathcal{L}$ -q.t.  $x$ , tem-se

$$|x - \psi^{GS}(x)| \leq |x - \psi(x)|, \quad (2.1)$$

onde  $|x - \infty| = \infty$ . Note-se que no algoritmo GS ótimo para os lugares, para qualquer  $x \notin \Delta$ , tem-se que  $\psi^{GS}(x)$  é igual ao centro mais próximo de  $x$  que nunca rejeita a  $x$ , ou  $\infty$  se todos os centros rejeitam ao  $x$ . Assim, a primeira desigualdade do item 1 segue-se de Lema 2.2 com  $\Xi_0 = \Xi$  e  $\alpha_0 \stackrel{D}{=} \alpha$  (porque, nesse caso, conforme à notação do Lema,  $G^{-1}(U) = F^{-1}(U)$ ).

Agora veja-se a segunda desigualdade do item 2. Para obter uma contradição, suponha-se que  $\gamma_\xi(\psi, r) < \gamma_\xi(\psi^{GS}, r)$  para algum conjunto de apetites  $A$  tais que  $\mathbf{P}_2(A) > 0$ . Como  $\psi^{GS}$  é uma alocação, isto implica que, sob  $\psi$ , o centro  $\xi$  não está satisfeito ou tem no seu território um lugar fora de  $B(\xi, r)$ . Além, existe um conjunto  $T \subset B(\xi, r) \cap [(\psi^{GS})^{-1}(\xi) \setminus \psi^{-1}(\xi)]$  tal que  $\mathcal{L}T > 0$ . De (2.1), para  $\mathcal{L}$ -q.t. lugar  $x \in T$ , tem-se que  $|x - \psi^{GS}(x)| < |x - \xi|$ . Mas então  $(x, \xi)$  é instável para  $\psi$ .

Analogamente à segunda desigualdade do item 2, suponha-se, para obter uma contradição, que  $\gamma_\xi(\psi^{GS_c}, r) < \gamma_\xi(\psi, r)$  para algum conjunto de apetites  $A$  com  $\mathbf{P}_2(A) > 0$ . Como  $\psi^{GS_c}$  é uma alocação, isto implica que, sob  $\psi^{GS_c}$ , o centro  $\xi$  não está satisfeito o tem no seu território um lugar fora de  $B(\xi, r)$ . Além, existe um conjunto  $T \subset B(\xi, r) \cap [\psi^{-1}(\xi) \setminus (\psi^{GS_c})^{-1}(\xi)]$  tal que  $\mathcal{L}T > 0$ . Mas, considerando o algoritmo GS ótimo para os centros,  $\xi$  rejeitou a  $T$ , o qual contradiz o Lema 2.3.

Agora prova-se a segunda desigualdade do item 1. Suponha para obter uma contradição que, para algum conjunto de apetites  $A$  com  $F(A) > 0$ , para todo lugar  $x$  num conjunto  $T$  de  $\mathcal{L}$ -medida positiva e dois centros  $\xi$  e  $\xi'$ , tem-se  $\psi^{GS_c}(x) = \xi$  e  $\psi(x) = \xi'$ , onde  $|x - \xi| < |x - \xi'|$ . Então, ou  $\xi$  não está satisfeito sob  $\psi$  ou  $\psi^{-1}(\xi)$  contém um lugar  $y$  mais longe de  $\xi$  do que  $\mathcal{L}$ -q.t. lugar em  $T$ , caso contrario teria-se uma contradição para a primeira desigualdade do item 2. Mas agora, para  $\mathcal{L}$ -q.t.  $x \in T$ , tem-se que o par  $(x, \xi)$  é instável para  $\psi$ .

□

Voltando ao processo pontual  $\Pi$  que foi definido no começo desta seção, como  $\lambda$  é finito tem-se que  $[\Pi]$  é discreto  $\mathbf{P}_1$ -q.c. Um **fator de alocação** é uma função mensurável  $\Psi_\bullet$  a qual atribui a  $\mathbf{P}_1$ -q.t. medida pontual  $\pi$  uma alocação  $\Psi_\pi$  de  $[\pi]$ . Além disso  $\Psi_\bullet$  é equivariante por translações no seguinte sentido: para qualquer translação  $T$  de  $\mathbb{R}^d$ , se  $\Psi_\pi(x) = \xi$  então  $\Psi_{T\pi}(Tx) = T\xi$ . Um fator de alocação é *equivariante a isometrias* se o anterior se cumpre para toda isometria  $T$ .

Seja  $\Pi^*$  a versão de Palm do processo pontual  $\Pi$  ( ou seja,  $\Pi^*$  é o processo pontual original  $\Pi$  com um ponto adicional na origem), com lei  $\mathbf{P}_1^*$  e esperança  $\mathbf{E}_1^*$ . Então  $\mathbb{P}^*$  e  $\mathbb{E}^*$  são a probabilidade e a esperança associadas à versão de Palm do modelo PLA. Finalmente, note-se que, como o apetite aleatório  $\alpha$  é independente dos centros, então  $\mathbf{P}_2^*(\cdot) = \mathbf{P}_2(\cdot)$ , logo  $\mathbf{E}_2^*(\cdot) = \mathbf{E}_2(\cdot)$ . Assim, se  $\Psi_\bullet$  é um fator de alocação, então  $\Psi_{\Pi^*}$  está definido  $\mathbf{P}_1^*$ -q.c.

**Lema 2.4 (Consistência lugar-centro).** Se  $\Pi$  é um processo pontual invariante a translações de intensidade  $\lambda \in (0, \infty)$  e  $\Psi_\bullet$  é uma fator alocação de  $\Pi$  então

$$\mathbb{E}g_0(\Psi_\Pi, r) = \lambda \mathbb{E}^* \gamma_0(\Psi_{\Pi^*}, r), \forall r.$$

Para provar o lema anterior precisa-se primeiro provar o seguinte lema simples:

**Lema 2.5** (Princípio de transporte de massa). Seja  $m : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \rightarrow [0, \infty]$  uma função que satisfaz  $m(u+z, v+z) = m(u, v)$  para todo  $z \in \mathbb{Z}^d$ , Então

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^d} m(0, v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} m(u, 0).$$

*Demonstração.*

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^d} m(0, v) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} (-v, 0) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} m(u, 0).$$

□

Para  $z \in \mathbb{Z}^d$ , defina-se o **cubo unitário**  $Q_z = [0, 1]^d + z \subset \mathbb{R}^d$ .

*Demonstração do Lema 2.4.* Seja

$$m(u, v) = \mathbb{E} \mathcal{L} \{ x \in Q_u : \Psi_\Pi(x) \in Q_v, |x - \Psi_\Pi(x)| < r \}.$$

Pelo teorema de Fubini e a invariância por translações, tem-se que

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^d} m(0, v) = \mathbb{E} \mathcal{L} \{ x \in Q_0 : |x - \Psi_\Pi(x)| < r \} = \mathbb{P}[|0 - \Psi_\Pi(0)| < r]$$

e pela definição dos processos de Palm,

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} m(u, 0) = \mathbb{E} \sum_{\xi \in [\Pi] \cap Q_0} \mathcal{L} [\Psi_{\Pi}^{-1}(\xi) \cap B(\xi, r)] = \lambda \mathbb{E}^* \mathcal{L} [\Psi_{\Pi^*}^{-1}(0) \cap B(0, r)].$$

Assim, o resultado é direto. □

*Demonstração do Teorema 2.2.* Claramente,  $\Psi_{\bullet}^{GS}$  e  $\Psi_{\bullet}^{GS_c}$  são fatores de alocação equivariantes por isometrias. Ao tomar valores esperados no Lema 2.1 e ao usar o Lema 2.4, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}g_0(\Psi_{\Pi}^{GS}, r) &\geq \mathbb{E}g_0(\Psi_{\Pi}^{GS_c}, r) = \lambda \mathbb{E}^* \gamma_0(\Psi_{\Pi^*}^{GS_c}, r) \\ &\geq \lambda \mathbb{E}^* \gamma_0(\Psi_{\Pi^*}^{GS}, r) = \mathbb{E}g_0(\Psi_{\Pi}^{GS}, r). \end{aligned}$$

Logo, todas as esperanças anteriores são iguais. Assim, pela invariância por translações, tem-se

$$\mathbb{E}g_x(\Psi_{\Pi}^{GS}, r) = \mathbb{E}g_x(\Psi_{\Pi}^{GS_c}, r)$$

para todo  $r$  e para todos os lugares  $x$ . Além, pelo Lema 2.1, tem-se que,  $\mathbf{P}_2$ -q.c.,

$$g_x(\Psi_{\Pi}^{GS}, r) \geq g_x(\Psi_{\Pi}^{GS_c}, r) \quad \text{para todo } r$$

em todo ponto onde as duas quantidades estão definidas. Logo, para todos os lugares  $x$  tem-se que,  $\mathbb{P}$ -q.c.,

$$g_x(\Psi_{\Pi}^{GS}, r) = g_x(\Psi_{\Pi}^{GS_c}, r) \quad \text{para todo } r, \tag{2.2}$$

em todo ponto onde as duas quantidades estão definidas. Assim, pelo teorema de Fubini, tem-se que (2.2) se cumpre  $\mathbb{P}$ -q.c., para  $\mathcal{L}$ -q.t. lugar  $x$ .

Se  $x \notin \Delta$ , (2.2) implica a igualdade de  $\Psi^{GS}(x) = \Psi^{GS_c}(x)$ . Logo,  $\mathbb{P}$ -q.c., para  $\mathcal{L}$ -q.t.  $x$ , tem-se que  $\Psi^{GS}(x) = \Psi^{GS_c}(x)$ . Por último, usando o Lema 2.1 mais uma vez obtém-se que,  $\mathbb{P}$ -q.c., para qualquer uma alocação estável  $\psi$  de  $\Xi = [\Pi]$  e  $\mathcal{L}$ -q.t.  $x$ ,

$$g_x(\Psi_{\Pi}^{GS}, r) \geq g_x(\psi, r) \geq g_x(\Psi_{\Pi}^{GS_c}, r) = g_x(\Psi_{\Pi}^{GS}, r) \quad \text{para todo } r,$$

logo todas as expressões anteriores são iguais. Então,  $\mathbb{P}$ -q.c., duas alocações estáveis a  $[\Pi]$  são iguais para  $\mathcal{L}$ -q.t. ponto  $x$ . □

Como consequência do resultado anterior, pode-se tomar que para todo processo pontual  $\Pi$  definido com as condições do teorema  $\Psi_{\Pi} = \Psi = \Psi^{GS}$ .

## 2.4 Transições de fase

Nesta seção vai-se provar um resultado sobre as transições de fase cujo enunciado é muito intuitivo.

Lembre-se da construção em medida da primeira seção que  $\mathbb{P}$  é a medida de probabilidade conjunta,  $\mathbf{P}_1$  é a medida de probabilidade do processo pontual  $\Pi$  e  $\mathbf{P}_2$  é a medida de probabilidade para o apetite do modelo PLA. Sejam, respectivamente,  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  os seus operadores de esperança. Defina-se o **apetite residual** de um centro  $\xi$  como  $U(\xi) = U_{\Psi}(\xi) = \alpha_{\xi} - \mathcal{L}\Psi^{-1}(\xi)$ .

**Proposição 2.1.** Seja  $\Pi$  um processo pontual ergódico de intensidade  $\lambda \in (0, \infty)$  e  $\mathbf{E}_2\alpha < \infty$ . Seguindo a notação da construção em medida da primeira seção, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 \text{ é não reclamado}) &= (1 - \lambda\mathbf{E}_2\alpha) \vee 0 \\ \mathbb{E}^*U(0) &= (\mathbf{E}_2\alpha - \lambda^{-1}) \vee 0 \end{aligned}$$

(Note-se que, como o apetite é independente do processo pontual  $\Pi$ , então  $\mathbb{E}\alpha = \mathbf{E}_2\alpha$ ).

*Demonstração.* O Lema 2.4 com  $r = \infty$  diz que  $\mathbb{P}(0 \text{ é reclamado}) = \lambda \mathbb{E}^* \mathcal{L} \Psi_{\Pi^*}^{-1}(0)$ . Logo, a partir da definição do apetite residual, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 \text{ é não reclamado}) &= 1 - \lambda \mathbb{E}^* \mathcal{L} \Psi_{\Pi^*}^{-1}(0) \\ &= 1 + \lambda \mathbb{E}^* \alpha - \lambda \mathbb{E}^* U(0). \end{aligned}$$

Logo

$$\lambda \mathbb{E}^* U(0) - \mathbb{P}(0 \text{ é não reclamado}) = \lambda \mathbb{E} \alpha - 1$$

Lembre-se que nenhuma alocação estável pode ter lugares não reclamados e centros insatisfeitos. Também, pela ergodicidade, a existência de um conjunto  $\mathcal{L}$ -não-nulo de lugares não reclamados é um evento zero-um. Por tanto, só um dos dois termos à esquerda pode ser diferente de zero, então o resultado é obtido. □

**Teorema 2.3.** Considere a alocação estável a um processo pontual de intensidade  $\lambda \in (0, \infty)$  o qual é ergódico sob translações com apetite aleatório  $\alpha$  tal que

1. Se  $\lambda \mathbf{E}_2 \alpha < 1$  (**subcrítico**) então q.c. todos os centros estão satisfeitos mas existe um volume infinito de lugares não reclamados.
2. Se  $\lambda \mathbf{E}_2 \alpha = 1$  (**crítico**) então q.c. todos os centros estão satisfeitos e  $\mathcal{L}$ -q.t. lugar é reclamado.
3. Se  $\lambda \mathbf{E}_2 \alpha > 1$  (**supercrítico**) então q.c. não todos os centros estão satisfeitos mas  $\mathcal{L}$ -q.t. os lugares são reclamados.

*Demonstração.* É imediata da Proposição 2.1. □

## 2.5 Monotonicidade

**Proposição 2.2.** Seja  $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$  e  $\{\alpha_\xi\}$  uma realização dos apetites e sejam  $\psi_1$  e  $\psi_2$  as suas respectivas alocações GS ótimas para os centros.

1.  $\mathbf{P}_2$ -q.c., para  $\mathcal{L}$ -q.t. lugar  $x$ , tem-se que  $|x - \psi_1(x)| \geq |x - \psi_2(x)|$ .
2.  $\mathbf{P}_2$ -q.c., para todo centro  $\xi \in \Xi_1$  e todo  $r \in [0, \infty]$ , tem-se que  $\gamma_\xi(\psi_1, r) \geq \gamma_\xi(\psi_2, r)$ .

*Demonstração.* Ao lembrar que o algoritmo GS ótimo para os lugares aloca um lugar ao centro mais próximo que não o rejeita, o resultado 1 é direto pelo Lema 2.2 com  $\Xi_0 = \Xi_1$  e  $\Xi = \Xi_2$ ,  $\psi = \psi_1$ ,  $\psi^{GS} = \psi_2$  e  $\alpha_0 \stackrel{D}{=} \alpha$ .

Para provar 2, suponha-se que a declaração é falsa para algum conjunto de apetites  $A$  com  $\mathbf{P}_2(A) > 0$ , para algum  $\xi$  e para algum  $r$ . Então existe um conjunto  $C \subset B(\xi, r)$  de volume positivo com  $\psi_2(x) = \xi$  mas  $\psi_1(x) \notin \{\xi, \Delta\}$  para todo  $x \in C$ . Ainda mais,  $\xi$  cobiça todos os lugares de  $C$  sob  $\psi_1$ . Pela parte 1 desta proposição, tem-se que dado  $x \in C$ ,  $|x - \psi_1(x)| \geq |x - \xi|$  e como  $x$  não é equidistante de dois centros (porque  $x \notin \Delta$ ), a última desigualdade é estrita. Mas então  $x$  deseja a  $\xi$  sob  $\psi_1$ , logo  $(x, \xi)$  é instável sob  $\psi_1$ , uma contradição. □

**Proposição 2.3.** Seja  $\Xi$  e sejam  $\psi_1$  e  $\psi_2$  duas alocações GS a  $\Xi$  com apetites aleatórios  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente, onde  $\alpha_1 \stackrel{D}{\leq} \alpha_2$ .

1.  $\mathbf{P}_2$ -q.c., para  $\mathcal{L}$ -q.t. lugar  $x$ , tem-se que  $|x - \psi_1(x)| \geq |x - \psi_2(x)|$ .
2.  $\mathbf{P}_2$ -q.c., para todo centro  $\xi \in \Xi$  e todo  $r \in [0, \infty]$ , tem-se que  $(\alpha_1)_\xi - \gamma_\xi(\psi_1, r) \leq (\alpha_2)_\xi - \gamma_\xi(\psi_2, r)$ , onde  $(\alpha_i)_\xi$  e  $(\alpha_2)_\xi$  com  $i = 1, 2$  são realizações dos apetites para  $\xi$  sob  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , respectivamente.

*Demonstração.* Ao lembrar que o algoritmo GS ótimo para os lugares aloca um lugar ao centro mais próximo que não o rejeita, o resultado 1 é direto pelo Lema 2.2 com  $\Xi_0 = \Xi$ ,  $\psi = \psi_1$ ,  $\psi^{GS} = \psi_2$ ,  $\alpha_0 \stackrel{D}{=} \alpha_1$  e  $\alpha \stackrel{D}{=} \alpha_2$ .

Para provar 2, suponha-se que a declaração é falsa para algum conjunto de apetites  $A$  com  $\mathbf{P}(A) > 0$ , para algum  $\xi$  e para algum  $r$ . Então existe um

conjunto  $C \subset B(\xi, r)$  de volume positivo com  $\psi_2(x) = \xi$  mas  $\psi_1(x) \notin \{\xi, \Delta\}$  para  $x \in C$ . Ainda mais,  $\xi$  cobiça todos os lugares de  $C$  sob  $\psi_1$ . Pela parte 1 desta proposição, tem-se que dado  $x \in C$ ,  $|x - \psi_1(x)| \geq |x - \xi|$  e como  $x$  não é equidistante de dois centros, a última desigualdade é estrita. Mas então  $x$  deseja a  $\xi$  baixo  $\psi_1$ , logo  $(x, \xi)$  é instável sob  $\psi_1$ , uma contradição.  $\square$

## 2.6 Geometria

Nesta seção, vão se provar uns importantes fatos geométricos importantes. Tais fatos serão importantes nos capítulos seguintes para conhecer o comportamento da cauda da distância de um lugar típico ao seu centro.

**Teorema 2.4.** Considere uma alocação estável a um processo pontual ergódico invariante por translações com intensidade finita, então

- (i) Todos os territórios estão limitados  $\mathbf{P}_1$ -q.c.
- (ii) Todo subconjunto limitado de  $\mathbb{R}^d$  só intersecta finitos territórios  $\mathbb{P}$ -q.c.
- (iii) Pode-se escolher um fator invariante por isometrias estável  $\Psi_\Pi$  de tal forma que todo território seja a união de finitos conjuntos abertos conectados  $\mathcal{L}$ -,  $\mathbf{P}_1$ -q.c.

Na prova do teorema vão se necessitar alguns conceitos e resultados. Eles são enunciados a continuação. O primeiro lema vai se requerer na prova dos itens (i) e (ii):

Seja  $S = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$  a esfera unitária ao redor da origem. Uma *calota* é um subconjunto próprio de  $S$  da forma  $H = S \cap B(y, r)$  onde  $y \in S$ . Um *cone* é um conjunto da forma  $V = V_H = \{\alpha h : h \in H \text{ com } \alpha \in (0, \infty)\}$  onde  $H$  é uma calota.

**Lema 2.6 (Cones).** Seja  $D$  uma constante no intervalo  $(0, 2)$ . Para toda  $d \geq 1$  existem  $V_1, \dots, V_k$  cones, com  $k \in \mathbb{N}$ , tais que  $\bigcup_{j=1}^k V_j = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  e tais que se  $x, y \in V_i$ , com  $i \in \{1, \dots, k\}$ , então

$$|x| \geq |y| \Rightarrow |x - y| \leq |x| + (D - 1)|y|.$$

*Demonstração.* O conjunto de todos os bonés de diâmetro constante  $D$  é uma cobertura do conjunto compacto  $S$ , logo  $S$  tem uma cobertura finita  $H_1, \dots, H_k$ . Suponha-se que  $x, y \in V_{H_i} = V_i$  e  $x \geq y$ . Seja  $\beta = |y|/|x|$ , então  $\beta x, y \in |y|H_i$ . Logo, tem-se

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq |x - \beta x| + |\beta x - y| \\ &\leq (1 - \beta)|x| + \text{diam}(|y|H_i) \\ &= |x| - |y| + D|y| \\ &= |x| + (D - 1)|y|. \end{aligned}$$

□

*Demonstração do Teorema 2.4(i).* Chame-se um centro de **mau** se o seu território não é limitado. Suponha-se que, com probabilidade positiva, existem centros que não são limitados, então eles formam um processo pontual ergódico invariante por translações com intensidade positiva.

Sejam  $V_1, \dots, V_k$  cones como no Lema 2.6. Como cada cone contém bolas arbitrariamente grandes, também contém infinitos centros maus  $\mathbf{P}_1$ -q.c. Para  $R > R' > 1$  definam-se os conjuntos

$$\begin{aligned} T_0 &= B(0, 1) \\ T_i &= V_i \cap [B(0, R) \setminus B(0, R')] \quad \text{para } i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Pelas razões expostas anteriormente tem-se que o evento

$$A = \{\text{em cada } T_i \text{ há um mau centro}\}$$

tem probabilidade positiva. Suponha-se que o evento  $A$  ocorre e seja  $\xi_i$  um mau centro em  $T_i$  para  $i = 1, \dots, k$ . Como  $\xi_0$  é mau centro, existe um lugar

$x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0, R)$  no seu território e  $x$  pertence a algum cone  $V_j$ . Como  $\xi_j \in V_j$  e  $|x| \geq R \geq |\xi_j| \geq R' > 1$ , o Lema 2.6 aplica e obtem-se que, para  $0 < D \leq 1 - 1/R'$ ,

$$\begin{aligned} |x - \xi_j| &\leq |x| + (D - 1)|\xi_j| \\ &\leq |x| + (D - 1)R' \\ &\leq |x| - 1 \\ &\leq |x - \xi_0|. \end{aligned}$$

Como  $\xi_j$  é mau centro, existe um lugar  $y$  no seu território com  $|y - \xi_j| > |x - \xi_j|$ . Logo  $(x, \xi_j)$  é instável, uma contradição.  $\square$

*Demonstração do Teorema 2.4(ii).* Pela invariância por translações, basta provar que  $B(0, 1)$  intersecta finitos territórios. Além, note-se que, como  $\Xi$  é discreto  $\mathbf{P}_1$ -q.c., se uma bola  $B$  contém infinitos territórios, então  $\Psi(B)$  contém centros a distâncias arbitrariamente grandes de  $B$ ,  $\mathbf{P}_1$ -q.c.

Considere-se a rede  $\mathbb{Z}^d$ . Um lugar da rede  $z \in \mathbb{Z}^d$  vai se chamar de **mau** se  $B(z, 1)$  intersecta infinitos territórios. Suponha-se que  $\mathbf{P}_1[0 \text{ é mau}] > 0$ . Para  $R > R' > 1$  definam-se os conjuntos

$$\begin{aligned} T_0 &= B(0, 1) \\ T_i &= V_i \cap [B(0, R) \setminus B(0, R')] \quad \text{para } i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Pelas razões expostas na prova da parte (i) o evento

$$C = \{\text{em cada } T_i \text{ há um mau lugar da rede}\}$$

tem probabilidade positiva. Caso  $C$  ocorra, existe um lugar  $x \in B(0, 2)$  com  $\Psi(x) \in \mathbb{R}^d \setminus B(0, R)$  e  $\Psi(x) \in V_j$  para algum  $j \in 1, \dots, k$ . Seja  $z_j$  um lugar mau da rede em  $T_j$ ; então existe  $y \in B(z_j, 1)$  com  $|y - \Psi(y)| > |y - \Psi(x)|$ . Pelo Lema 2.6, quando  $0 < D \leq 1 - 5/R'$ , tem-se que

$$|y - \Psi(x)| \leq |z_j - \Psi(x)| + 1$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\Psi(x)| + (D - 1)|z_j| + 1 \\
&\leq |\Psi(x)| + (D - 1)R' + 1 \\
&\leq |\Psi(x)| - 4 \\
&< |\Psi(x) - x|.
\end{aligned}$$

Logo o par  $(y, \Psi(y))$  é instável. □

Os seguintes conceitos e resultados vão se precisar na prova do item (iii) do Teorema 2.4. Ainda mais, a definição de alocação canônica não vai ser útil só nesta seção, mas também no capítulo de grandes desvios:

**Definição 2.3 (Subconjunto essencial).** Seja  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  o conjunto dos borelianos em  $\mathbb{R}^d$  e sejam  $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Se  $\mathcal{L}(B \setminus A) = 0$ , o conjunto  $A$  chama-se de **subconjunto essencial** de  $B$  e se nota  $A \subseteq_{\text{ess}} B$ .

**Definição 2.4 (Versão canônica de uma alocação).** Seja  $\psi$  uma alocação estável. Vai se definir a função de alocação canônica  $\bar{\psi}$  da seguinte forma: para um lugar  $x \in \mathbb{R}^d$ , se existe  $\zeta \in \Xi \cup \{\infty\}$  tal que  $x$  tem uma vizinhança que é um subconjunto essencial de  $\psi^{-1}(\zeta)$ , faça-se  $\bar{\psi}(x) = \zeta$ . Se não existe tal  $\zeta$ , faça-se  $\bar{\psi}(x) = \Delta$ .

Pode-se ver que a versão canônica está bem definida pois dos conjuntos que difiram num conjunto de medida positiva não podem ter o mesmo subconjunto essencial. Note-se que se duas alocações são iguais  $\mathcal{L}$ -q.c., vão ter a mesma  $\bar{\psi}$ . Ao observar com cuidado a Definição 2.4, pode-se ver que o objetivo é alocar em  $\Delta$  todos os pontos na fronteira de um segmento do territórios em  $\Xi \cup \{\infty\}$ .

Defina-se o raio aleatório do território de  $\xi$  como  $\tilde{R}(\xi) := \sup\{|x - \xi| : x \in \Psi^{-1}(\xi)\}$  e defina-se um conjunto aleatório de esferas e hiperplanos

$$Z := \bigcup_{\xi} \{x \in \mathbb{R}^d : |x - \xi| = \tilde{R}(\xi)\} \cup \bigcup_{\xi \neq \xi'} \{x \in \mathbb{R}^d : |x - \xi| = |x - \xi'|\}.$$

Ainda mais, seja  $B$  uma bola. Pelo Teorema 2.4(ii),  $B$  intersecta só finitos territórios  $\mathbf{P}_1$ -q.c. que pertencem a centros  $\xi_1, \dots, \xi_k$ . Define-se o conjunto

$$Z_B = \bigcup_i \{x \in \mathbb{R}^d : |x - \xi_i| = \tilde{R}(\xi_i)\} \cup \bigcup_{i \neq j} \{x \in \mathbb{R}^d : |x - \xi_i| = |x - \xi_j|\}.$$

Se chamará de **célula** de  $B$  a toda componente conectada de  $B \setminus Z_B$ . Note-se que todas as células de  $B \setminus Z_B$  são conjuntos abertos porque  $B \setminus Z_B$  é aberto.

**Lema 2.7.** Para cada  $x \in B \setminus Z_B$  com  $\Psi(x) \neq \Delta$ , tem-se que  $\Psi(x)$  é igual ao centro mais próximo de  $x$  no conjunto

$$T(x) = \{\xi_i : |x - \xi_i| < \tilde{R}(\xi_i)\}.$$

ou  $\Psi(x) = \infty$  quando  $T(x) = \emptyset$ .

*Demonstração.* Note-se que pelas definições de  $\tilde{R}(\xi)$  e  $Z_B$ , tem-se que  $\Psi(x) \in T(x) \cup \{\infty\}$ . Mas se  $T(x)$  contém um centro  $\xi_j$  mais próximo de  $x$  que  $\Psi(x)$ , então o par  $(x, \xi_j)$  é instável pois  $x$  deseja ao  $\xi_j$  e, pela definição de  $T(x)$ ,  $\xi_j$  cobiça ao  $x$ , uma contradição. □

**Lema 2.8.**  $\mathbf{P}_1$ -q.c., se  $C$  é uma célula, então o cardinal de  $\Psi(C) \setminus \Delta$  é 1.

*Demonstração.* Seja  $x$  como no Lema 2.7, note-se que as  $k^2$  funções

$$\begin{aligned} |x - \xi_i| - \tilde{R}(\xi_i), & \quad i = 1, \dots, k, \\ |x - \xi_j| - |x - \xi_i|, & \quad i \neq j, \end{aligned}$$

são contínuas em  $x$  e diferentes de 0 fora de  $Z_B$ . Então os sinais delas são constantes em cada célula e assim o resultado é consequência do Lema 2.7. □

**Lema 2.9.**  $\mathbf{P}_1$ -q.c., para cada lugar  $x \notin Z$ ,  $x$  tem uma vizinhança  $V$  tal que o cardinal de  $\Psi(V) \setminus \Delta$  é 1.

*Demonstração.* Seja  $B = B(x, 1)$  e definam-se  $Z_B$  e as células como antes. Como  $Z_B \subset Z$ ,  $x$  pertence a alguma célula. Mas como todas as células são abertas,  $x$  tem uma vizinhança contida na célula. Logo o resultado é consequência do Lema 2.8.  $\square$

**Proposição 2.4.** Seja  $\Psi_\bullet$  um fator de alocação equivariante por isometrias a  $\Pi$  e seja  $\bar{\Psi}_\bullet$  como na Definição 2.4. Então  $\bar{\Psi}_\bullet$  é uma alocação estável.

*Demonstração.* Note-se primeiro que, como  $Z$  tem medida de Lebesgue nula, o Lema 2.9 implica que  $\Psi = \bar{\Psi}$ , para  $\mathcal{L}$ -q.t. ponto,  $\mathbf{P}_1$ -q.c. Segue-se que  $\bar{\Psi}_\Pi$  é uma alocação,  $\mathbf{P}_1$ -q.c. Pela construção,  $\bar{\Psi}_\bullet$  herda a equivariância por isometrias de  $\Psi_\bullet$ . Da definição também segue-se que os territórios de  $\Psi_\bullet$  e o conjunto de lugares não reclamados são conjuntos abertos.

Suponha-se que  $(x, \xi)$  é instável baixo  $\bar{\Psi}$ . Seja  $\bar{\Psi}(x) = \zeta$  e  $\bar{\Psi}(y) = \xi$ , onde  $|x - \xi| < |x - \zeta|$  e  $|x - \xi| < |y - \xi|$ . Então  $x$  e  $y$  têm vizinhanças  $\mathcal{L}$ -q.c. iguais a  $\Psi^{-1}(\zeta)$  e  $\Psi^{-1}(\xi)$  respectivamente, logo é possível encontrar  $x'$  e  $y'$  com  $\Psi(x') = \zeta$  e  $\Psi(y') = \xi$  perto o suficiente de  $x, y$  para ter ainda que  $|x' - \xi| < |x' - \zeta|$  e  $|x' - \xi| < |y' - \xi|$ . Igualmente, se  $x$  for não reclamado em  $\bar{\Psi}$ , então pode-se encontrar um  $x'$  perto de  $x$  que seja não reclamado em  $\Psi$ . Finalmente, se  $\xi$  não está satisfeito em  $\bar{\Psi}$ , então não está satisfeito em  $\Psi$ . Em todos os casos se deduz que  $(x', \xi)$  é instável para  $\Psi$ , uma contradição.  $\square$

**Proposição 2.5.**  $\mathbf{P}_1$ -q.c.,  $\bar{\Psi}_\Pi$  é a única alocação que minimiza o conjunto  $\psi^{-1}(\Delta)$  na classe de alocações estáveis  $\psi$  de  $[\Pi]$  que têm todos os seus territórios abertos e o conjunto de lugares não reclamados também aberto.

*Demonstração.* Note-se que,  $\mathbf{P}_1$ -q.c., para qualquer  $\psi$  como foi descrita no enunciado e para todo  $x$  tal que  $\psi(x) \neq \Delta$ , tem-se que  $\psi$  toma o valor  $\psi(x)$  em alguma vizinhança de  $x$ , logo  $\bar{\Psi}(x) = \psi(x)$ .  $\square$

O seguinte lema é necessário para provar a última proposição requerida para provar o Teorema 2.4(iii).

**Lema 2.10.** Seja  $Y$  a união de finitas esferas de dimensão  $d - 1$  e finitos hiperplanos de dimensão  $d - 1$  em  $\mathbb{R}^d$ . Então  $\mathbb{R}^d \setminus Y$  só tem finitas componentes conectadas.

*Demonstração.* O argumento é por indução. Num caso mais geral, seja  $Y$  um conjunto de finitos hiperplanos não paralelos  $(H_i)_{i=1}^k$  de dimensão  $d - 1$  em  $\mathbb{R}^d$ . Suponha-se que os  $k$  hiperplanos vão ser inseridos em  $\mathbb{R}^d$  um depois do outro, então no máximo poderão haver  $2^k$  componentes conectadas:

Quando tem-se inserido 0 hiperplanos, após inserir o primeiro hiperplano, o espaço vai ser dividido em duas componentes conectadas, logo a hipótese se cumpre para 0. Agora suponham-se  $k$  hiperplanos de dimensão  $d - 1$  não paralelos que dividem o espaço em  $2^k$  componentes conectadas; então se um novo hiperplano bissectasse todas as componentes conectadas, no máximo geraria  $2^{k+1}$  novas componentes conectadas (o novo hiperplano dividiu em dois as componentes conectadas). Logo se  $Y$  está composto por uma quantidade finita de hiperplanos  $k$ , as componentes conectadas geradas por eles vão ser finitas e limitadas superiormente por  $2^k$ .

□

Observe-se que se  $k \geq 3$  no lema anterior, a quantidade de componentes conectadas vai ser estritamente menor que  $2^k$ . Isto porque depois de ter dois hiperplanos não paralelos formando 4 componentes conectadas, nenhum hiperplano pode bissectar todas as componentes conectadas (pois implicaria que cada hiperplano corta os eixos em mais de um ponto, um absurdo. Veja-se a Figura 2.6 para um exemplo em dimensão 2).

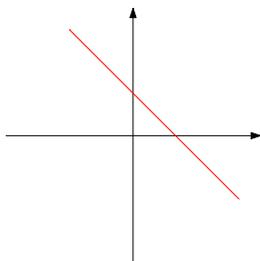


Figura 2.1: Se os dois eixos consideram-se hiperplanos, o terceiro hiperplano não pode bissectar todas as componentes.

**Proposição 2.6.** Os territórios de  $\bar{\Psi}$  têm finitas componentes conectadas e fronteira  $\mathcal{L}$ -nula.

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.4(i) e a invariância a translações é suficiente descartar a possibilidade de que a intercepção de  $B(0, 1)$  com algum território tenha infinitas componentes. Seja  $B = B(0, 1)$  e  $Z_B$  como já foram definidos. Pelo Lema 2.10 existem só finitas células y cada uma delas é conectada. O Lema 2.9 junto com a Definição 2.4 implica que  $\bar{\Psi}$  é constante em cada célula. Assim, basta com descartar a possibilidade de que a intercepção de algum território com  $B$  tenha uma componente contida completamente em  $B \cap Z_B$ . Mas isso é impossível porque qualquer componente é aberta e  $Z_B$  é  $\mathcal{L}$ -nulo. Pelo Lema 2.9, se  $x \notin Z$  então  $x$  não pertence à fronteira de nenhum território, mas,  $\mathbf{P}_1$ -q.c.,  $Z$  é  $\mathcal{L}$  nulo. Isto prova que os territórios de  $\bar{\Psi}$  têm fronteira  $\mathcal{L}$ -nula.

□

*Demonstração do Teorema 2.4(iii).* Segue-se das Proposições 2.4, 2.5 e 2.6.

□

# Capítulo 3

## Percolação

Neste capítulo vamos provar a existência de percolação no modelo PLA. Vamos apresentar duas formas de resolver a pergunta. A primeira forma está baseada em [3] de Freire, Popov y Vachkovskaia, que usa métodos de percolação fractal. A segunda forma é usando um teorema provado recentemente por Jean-Baptiste Gouéré em [6].

Sem perda de generalidade, vai-se reescrever  $\alpha_i$  como  $\alpha V_i$  onde  $\alpha$  é constante e  $\{V_i\}$  é uma seqüência de variáveis aleatórias *iid* positivas.

### 3.1 Método de Freire, Popov e Vachkovskaia

Em [3] foi parcialmente resolvido um problema em aberto colocado em [7] relacionado com a percolação dos lugares reclamados no modelo PL: nesse artigo, a ausência de percolação foi provada quando o apetite é pequeno. Apoiando-nos nesse resultado vamos provar aqui a ausência de percolação no modelo PLA quando  $\alpha$  também é pequeno:

**Definição 3.1 (Percolação).** Dissemos que há percolação dos lugares reclamados se existe um subconjunto de  $\mathcal{C}$  não limitado e conectado.

**Definição 3.2 (Ponto crítico).**

$$\alpha_p(d) = \sup\{\alpha :$$

$\mathbb{P}[0$  pertença a um subconjunto conectado não limitado de  $\mathcal{C}$  no modelo com  $d$  dimensões e com apetites dados por  $\alpha V_i] = 0\}$ .

**Teorema 3.1.** Seja  $V_i$  uma seqüência de variáveis aleatórias *iid* com distribuição  $F$ , média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ ; suponha que existe  $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$  (pequeno) tal que  $\int_{v \geq 0} v^{2+\delta_1} dF(v) < \infty$ . Então

- (i) Para qualquer dimensão  $d \geq 2$  temos que  $\alpha_p(d) > 0$ , isto é, se o apetite  $\alpha$  é pequeno o suficiente, então q.c. não há percolação dos lugares reclamados.
- (ii) Além disso, se  $\alpha$  é pequeno o suficiente e  $d \geq 2$  então há percolação dos lugares não reclamados (isto é, existe q.c. uma componente conectada e não limitada de  $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}$ ).

**Definição 3.3 (Cubos de nível).** Para  $m \geq 1$  e  $i = (i^{(1)}, \dots, i^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d$ , defina o cubo de nível  $m$ ,  $K_i^m$ , associado com  $i$  por

$$K_i^m = \left\{ x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d : -\frac{m}{2} \leq x^{(l)} - mi^{(l)} \leq \frac{m}{2} \right\}$$

Note-se que a união de todos os cubos de nível  $m$  é  $\mathbb{R}^d$  e a interseção de dois cubos de nível  $m$  distintos ou é vazia ou tem medida de Lebesgue nula. Dissemos que dois cubos estão conectados se têm ao menos um ponto em comum. Chame de  $\zeta^{(i)}$  o conjunto de centros em  $K_i^1$ , isto é, a cardinalidade do conjunto  $K_i^1 \cap \Xi$ . Definimos a distancia entre dois conjuntos:

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|$$

Assim, para todo  $r \geq 0$  definimos a bola discreta  $B_i(r)$  por

$$B_i(r) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} K_i^j \text{ se } r > 0$$

onde

$$\mathcal{J} = \{j \in \mathbb{Z}^d \mid \rho(K_i^1, K_j^1) \leq r\}$$

e  $B_i(0) := \emptyset$  (veja-se um exemplo duma bola discreta na Figura 3.1 em dimensão 2).

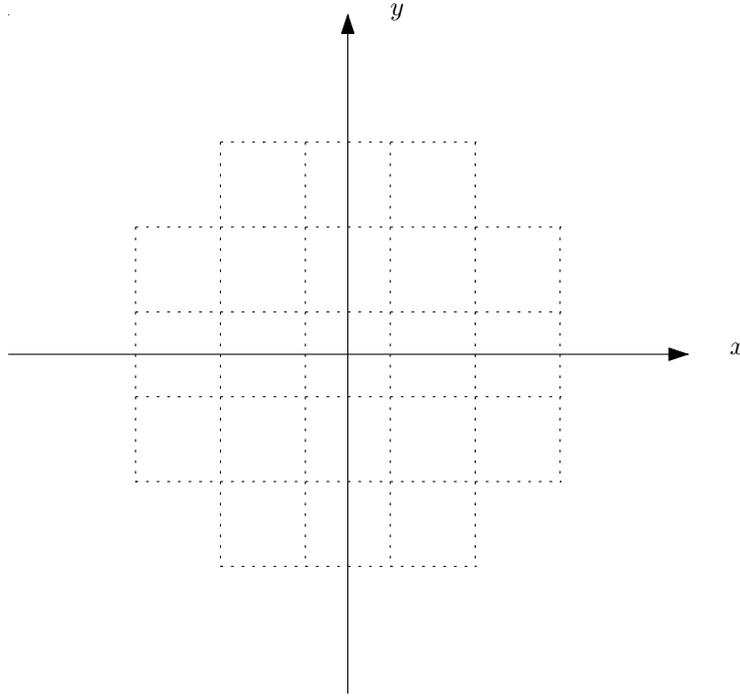


Figura 3.1:  $B_0(r)$ ,  $r \in (1, \sqrt{2})$

Gere-se um outro modelo da seguinte forma: selecione um  $\delta$  pequeno e, no modelo PLA original, quando  $\alpha V_i < \delta$  para o ponto  $\xi_i$ , defina o apetite de  $\xi_i$  igual a  $\delta$  (aqui o  $\alpha$  é muito pequeno e  $V_i$  é qualquer valor positivo). Isto é, o novo modelo domina ao primeiro; logo se o novo modelo não percola, o primeiro tampouco percola. Agora precisamos introduzir uma notação nova a qual difere da apresentada em [3] por causa do apetite aleatório.

**Definição 3.4 (Raio aleatório).** Para cada  $i \in \mathbb{Z}^d$  defina a variável aleatória

$$R_i = \inf \left\{ r > 0 : \sum_{j \in \mathbb{Z}^d \cap B_i(\beta_d r)} \sum_{\xi \in \zeta^{(j)}} \alpha V_\xi \leq \pi_d r^d \right\}, \text{ se } |\zeta^{(i)}| > 0$$

( $\inf \emptyset := +\infty$ ),  $\pi_d$  é o volume da bola com raio 1 em  $\mathbb{R}^d$  e

$$\beta_d = \left\lceil 3 + 2\sqrt{d}(\delta^{-1}\pi_d)^{1/d} \right\rceil, \quad (3.1)$$

$R_i := 0$  se  $|\zeta^{(i)}| = 0$  e  $\lceil x \rceil$  é o menor inteiro maior ou igual a  $x$ .

**Lema 3.1.**

$$\rho(B_i(R_i), \mathbb{R}^d \setminus B_i(\beta_d R_i)) > R_i.$$

*Demonstração.* Como  $\rho(K_i^1, B_i(R_i)) \leq R_i$  e os cubos de nível 1 têm lado 1 e diâmetro  $\sqrt{d}$ , tem-se:

$$\max_{x \in K_i^1, y \in B_i(R_i)} |x - y| \leq R_i + 2\sqrt{d} \quad (3.2)$$

Para  $\rho(B_i(R_i), \mathbb{R}^d \setminus B_i(\beta_d R_i))$  usando (3.2) e o fato de que  $\rho(K_i^1, B_i(\beta_d R_i)) \leq \beta_d R_i$ , obtém-se

$$\rho(B_i(R_i), \mathbb{R}^d \setminus B_i(\beta_d R_i)) \geq \beta_d R_i - (R_i + 2\sqrt{d}) \quad (3.3)$$

Finalmente, note que se  $R_i > 0$ , então existe ao menos um centro em  $B_i(\beta_d R_i)$  e deste modo  $\pi_d R_i^d \geq \alpha V \geq \delta$ , então  $R_i \geq (\delta \pi_d^{-1})^{1/d}$ , onde  $V$  tem distribuição  $F$ . Então para que o termo na direita de (3.3) seja maior do que  $R_i$  precisa-se  $\beta_d > 2 + 2\sqrt{d}(\delta^{-1}\pi_d)^{1/d}$  mas por (3.1) é isso o que acontece, logo o lema está demonstrado. □

**Lema 3.2.** Os territórios de todos os centros em  $K_i^1$  estão contidos em  $B_i(R_i)$ .

*Demonstração.* Suponha que existe  $\xi \in K_i^1$  e  $x \in \mathbb{R}^d$  tais que  $\psi(x) = \xi$  e  $|x - \xi| > R_i$ . É possível escolher um  $\varepsilon$  o suficiente pequeno para que  $|x - \xi| > R_i + \varepsilon$  e qualquer um lugar  $z$  com  $\rho(z, K_i^1) \leq R_i + \varepsilon$  que pertença a  $B_i(R_i)$ . O anterior porque  $B_i(R_i)$  é compacto, e para qualquer  $z'$  na fronteira de  $B_i(R_i)$  tem-se que  $\rho(z', K_i^1) > R_i$ , de outra forma o seguinte cubo de nível 1 também estaria incluído em  $B_i(R_i)$ .

Agora, pela Definição 3.4, o número de centros em  $B_i(\beta_d R_i)$  é no máximo  $\pi_d R_i^d \delta^{-1}$  e, caso atingir esse máximo, cada um desses centros reclamaria um território de volume  $\delta$ . Caso não atingir o número máximo de centros, quer dizer que existe um conjunto de centros  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  em  $B_i(\beta_d R_i)$  tais que excedem o volume  $\delta$  por uma quantidade  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$  onde  $\alpha'_i = \alpha V_i - \delta$  com  $i = 1, \dots, n$ . Assim o raio  $R_i$  seria,

$$R_i = \inf \left\{ r > 0 : \sum_{j \in \mathbb{Z}^d \cap B_i(\beta_d r)} \sum_{\xi \in \zeta_{\delta_+}^{(j)}} \alpha V_\xi + \sum_{\xi \in \zeta_{\delta_-}^{(j)}} \delta \leq \pi_d r^d \right\}, \text{ se } |\zeta^{(i)}| > 0,$$

onde  $\zeta_{\delta_-}^{(j)}$  e  $\zeta_{\delta_+}^{(j)}$  são, respectivamente, o conjunto de centros em  $K_j^1$  com volume menor ou igual que  $\delta$  e maior que  $\delta$  (note que  $\zeta_{\delta_-}^{(j)} \cup \zeta_{\delta_+}^{(j)} = \zeta^{(j)}$  e que  $|\zeta_{\delta_+}^{(j)}| = n$ ). Assim, o número máximo de centros em  $B_i(\beta_d R_i)$  é  $\pi_d R_i^d (\delta + \sum_{i=1}^n \alpha'_i)^{-1}$  e o volume total reclamado por esses centros seria  $\delta + \sum_{i=1}^n \alpha'_i$ . Deste modo, para qualquer dos dois casos tem-se que  $\mathcal{L}(\{z \in \mathbb{R}^d : |z - \xi| \leq R_i + \varepsilon\}) > \pi_d R_i^d$ . Então existe  $y$  tal que  $|y - \xi| \leq R_i + \varepsilon$  (e assim  $y \in B_i(R_i)$ ) e

- ou  $\psi(y) = \varepsilon'$  para algum  $\varepsilon' \in \mathbb{R}^d \setminus B_i(\beta_d R_i)$
- ou  $y$  não é reclamado.

Ou seja,  $y$  não é reclamado por nenhum centro em  $B_i(\beta_d R_i)$ . Agora vamos provar que  $(y, \varepsilon)$  é instável:

- $y$  deseja  $\xi$  porque pelo Lema 3.1 tem-se que  $|y - \xi| < |y - \psi(y)|$  e
- $\xi$  cobiça a  $y$  porque  $|y - \xi| < |x - \xi|$ .

Então os centros de  $K_i^1$  estarão satisfeitos com o seu território dentro de  $B_i(R_i)$ , o qual prova o lema. □

O Lema 3.2 nos permite majorar o modelo original pelo seguinte modelo de percolação dependente: dado o conjunto de pontos  $\Xi$  de um processo de Poisson, para todo  $K_i^1$  pintamos todos os cubos de nível 1 em  $B_i(R_i)$  e chamamos de  $\mathfrak{C}$  o conjunto dos lugares pintados. Isto é, definimos

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^d} B_i(R_i).$$

É importante observar que, pelo Lema 3.2,  $\mathcal{C} \subset \mathfrak{C}$ . Então para provar a primeira parte do Teorema 3.1, é suficiente provar a ausência de um conglomerado infinito em  $\mathfrak{C}$  para  $\lambda$  pequeno. Para tal fim precisamos de um resultado de um artigo clássico do Nagaev (o Corolário 1.8 de [15]) e da desigualdade de Chernoff:

**Lema 3.3 (Grandes desvios).** Seja  $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ , onde  $Z_i$  é uma seqüência de variáveis aleatórias *iid* com distribuição  $F$ , média 0, variância  $\sigma^2$ . Definimos  $A_{2+\delta_1}^+ := \int_{u \geq 0} u^{2+\delta_1} dF(u) < \infty$  ( $\delta_1$  é como foi definida no Teorema 3.1). Então, temos

$$\mathbf{P}[S_n > x] \leq \left( \frac{4 + \delta_1}{2 + \delta_1} \right)^{2+\delta_1} n A_{2+\delta_1}^+ x^{-(2+\delta_1)} + \exp \left\{ \frac{-2e^{-(2+\delta_1)} x^2}{(4 + \delta_1)^2 n \sigma^2} \right\}$$

**Lema 3.4** (Desigualdade de Chernoff para variável de Poisson). Seja  $N$  uma variável com distribuição de Poisson e média  $0 < \lambda < \infty$  então

$$\mathbf{P}[N \geq a] \leq e^{-\lambda g(\lambda/a)} \quad \text{para } a > \lambda \quad (3.4)$$

$$\mathbf{P}[N \leq a'] \leq e^{-\lambda g(\lambda/a')} \quad \text{para } a' < \lambda \quad (3.5)$$

onde  $g(x) = (x - 1 - \log x)/x$  e  $g(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* Para provar (3.4), seja  $s = a/\lambda$ , assim  $s^\lambda \mathbf{P}[N \geq a] \leq \mathbf{E}(s^N)$ , logo

$$\mathbf{P}[N \geq a] \leq s^{-\lambda} \mathbf{E}(s^N)$$

$$\begin{aligned}
&= s^{-\lambda} e^{\lambda(s-1)} \\
&= (\lambda/a)^\lambda e^{a-\lambda} \\
&= e^{a-\lambda+\lambda \log(\lambda/a)} \\
&= e^{-\lambda q(\lambda/a)}.
\end{aligned}$$

Para provar (3.5), seja  $s = a'/\lambda$ , assim  $s^\lambda \mathbf{P}[N \leq a'] \leq \mathbf{E}(s^N)$ , logo

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[N \leq a'] &\leq s^{-\lambda} \mathbf{E}(s^N) \\
&= s^{-\lambda} e^{\lambda(s-1)} \\
&= (\lambda/a')^\lambda e^{a'-\lambda} \\
&= e^{a'-\lambda+\lambda \log(\lambda/a')} \\
&= e^{-\lambda q(\lambda/a')}.
\end{aligned}$$

□

Em [15] o resultado do Lema 3.3 é apresentado de forma mais geral, para quando as v.a. não são identicamente distribuídas e a integral  $\int_{u \geq 0} u^t dF(u)$  existe para algum  $t \geq 2$ , mas aqui o apresentamos quando é o caso iid para resumir e com  $t = 2 + \delta_1$  pois não precisamos mais do que isso.

**Proposição 3.1.** Sejam  $c_1(\lambda)$ ,  $c_2$  e  $c_3$  constantes em  $\mathbb{R}$  com  $c_1(\lambda)$  que depende da intensidade do Processo de Poisson, então

$$\mathbf{P}[R_i > a] \leq c_3 a^{-d(1+\delta_1)} + e^{-c_2 a^d} + e^{-c_1(\lambda) a^d}$$

onde  $\delta_1$  é tal como foi definida no Lema 3.3.

*Demonstração.* Seja  $K = \lceil (2\beta_d a + 3)^d \rceil$  e  $V' = V - \mu$ . Agora, para abreviar a notação defina  $v = \pi_d a^d \alpha^{-1} - K\mu$ . Observe também que  $\mathcal{L}B_i(\beta_d a) \leq (2\beta_d a + 3)^d$ ; defina  $N \sim \mathcal{P}[\lambda(2\beta_d a + 3)^d]$ ; assim,  $|\cup_{j \in \mathbb{Z}^d \cap B_i(\beta_d a)} \zeta^{(j)}|$  está dominado por  $N$ . Então com essas considerações mais o Lema 3.3 tem-se:

$$\mathbf{P}[R_i > a] \leq \mathbf{P} \left[ \sum_{j \in \mathbb{Z}^d \cap B_i(\beta_d a)} \sum_{\xi \in \zeta^{(j)}} \alpha V_\xi > \pi_d a^d \right]$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \mathbf{P} \left[ \sum_{k=1}^N V_k > \pi_d a^d \alpha^{-1} \right] \\
 &\leq \mathbf{P} \left[ \sum_{k=1}^N V_k > \pi_d a^d \alpha^{-1} \mid N \leq K \right] \mathbf{P}[N \leq K] + \mathbf{P}[N > K] \\
 &\leq \mathbf{P} \left[ \sum_{k=1}^K V'_k > v \right] + \mathbf{P}[N > K] \\
 &\leq \mathbf{P} \left[ \sum_{k=1}^K V'_k > v \right] + e^{-\lambda(2\beta_d a + 3)^d g(\lambda(2\beta_d a + 3)^d / K)}
 \end{aligned}$$

Onde o segundo termo na última desigualdade é obtido ao usar o Lema 3.4. Agora, o primeiro termo pode-se limitar usando o Lema 3.3:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} \left[ \sum_{k=1}^K V'_k > v \right] &\leq \left( \frac{4 + \delta_1}{2 + \delta_1} \right)^{2+\delta_1} A_{2+\delta_1}^+ K v^{-(2+\delta_1)} + \exp \left\{ \frac{-2e^{-(2+\delta_1)} v^2}{(4 + \delta_1)^2 K \sigma^2} \right\} \\
 &\leq c_3 a^{-d(1+\delta_1)} + e^{-c_2 a^d}
 \end{aligned}$$

(porque  $K$  é da ordem de  $a^d$ ) para obter finalmente o resultado.  $\square$

O seguinte fato simples vai ser importante na hora de provar o Teorema 3.1:

**Lema 3.5.** Para determinar se o evento  $\{R_i < a\}$  ocorre, só é preciso considerar a configuração dos centros dentro de  $B_i(\beta_d a)$ .

*Demonstração.* Segue-se diretamente da definição de  $R_i$ .  $\square$

Considere-se um conjunto  $W \subset \mathbb{R}^d$  e seja  $\Xi_W = \Xi \cap W$  (note que como  $W$  é limitado,  $\Xi_W$  é finito q.c.). Como foi explicado anteriormente, q.c. existe uma única alocação estável correspondente ao conjunto de centros  $\Xi_W$ . Deste modo podemos construir o conjunto de lugares  $\mathfrak{C}|_W$  correspondente a essa

alocação estável tal como foi feito na construção de  $\mathfrak{C}$ . A saber: primeiro se definem as variáveis aleatórias  $\zeta_W^{(i)}$  como o conjunto  $\zeta \cap K_i^1 \cap W$ . Depois se define  $R_i^W$  de forma análoga à Definição 3.4, mudando somente  $\zeta_W^{(\cdot)}$  por  $\zeta^{(\cdot)}$ , para fazer  $\mathfrak{C}|_W = \cup_{i \in \mathbb{Z}^d} B_i(R_i^W)$ . Defina-se o seguinte anel de raio  $n^d$  para o cubo de nível  $m$ ,  $K_j^m$ :

$$\mathcal{A}(K_j^m) = \bigcup_{i: K_i^m \cap K_j^m = \emptyset} K_i^m$$

(de modo que  $\mathcal{A}(K_j^m)$  é a união de  $K_j^m$  com os  $3^d - 1$  cubos de nível  $m$  adjacentes).

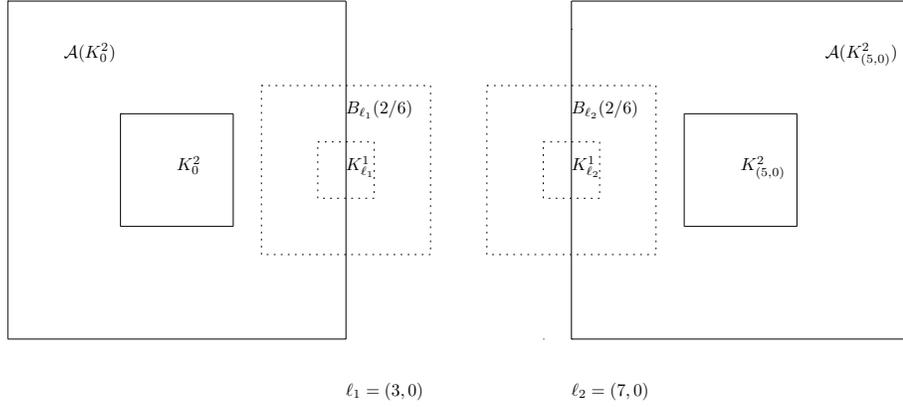
**Definição 3.5 (Cubos passáveis).** Um cubo de nível  $m$ ,  $K_j^m$  é *passável*, se satisfaz as seguintes duas condições:

1. O conjunto  $K_j^m$  intersecta uma componente conectada com diâmetro ao menos  $m/2$  de  $\mathfrak{C}|_{\mathcal{A}(K_j^m)}$ .
2. para qualquer  $i \in \mathcal{A}(K_j^m) \cap \mathbb{Z}^d$ , tem-se que  $R_i < \frac{m}{6(\beta_d+1)}$ .

Denote-se por  $\|\cdot\|_\infty$  a norma máxima em  $\mathbb{Z}^d$ . A observação importante é que o evento “o cubo de nível  $m$  é passável” só depende do que ocorre em um número finito de cubos ao seu redor:

**Lema 3.6 (Independência).** Suponha que  $m \geq 2$  e que  $\|i - j\|_\infty \geq 5$ . Então os eventos  $\{K_i^m \text{ é passável}\}$  e  $\{K_j^m \text{ é passável}\}$  são independentes.

*Demonstração.* Considere  $\ell_1 \in \mathcal{A}(K_i^m) \cap \mathbb{Z}^d$  e  $\ell_2 \in \mathcal{A}(K_j^m) \cap \mathbb{Z}^d$ . Pelo Lema 3.5, o evento  $\left\{R_{\ell_k} < \frac{m}{6(\beta_d+1)}\right\}$  depende somente do que ocorre dentro de  $B_{\ell_k}\left(\frac{\beta_d m}{6(\beta_d+1)}\right)$ ,  $k = 1, 2$ . Note que  $B_{\ell_k}\left(\frac{\beta_d m}{6(\beta_d+1)}\right) \subset B_{\ell_k}(m/6)$ . Então é direto verificar que, se  $m \geq 2$  e  $\|i - j\|_\infty \geq 5$ , para todos os  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , tem-se que  $B_{\ell_1}(m/6) \cap B_{\ell_2}(m/6) = \emptyset$  (veja-se a Figura 3.2), o qual prova o lema.  $\square$


 Figura 3.2: Independência quando  $m = 2$ .

Seja  $p_m := \mathbf{P}[K_0^m \text{ é passável}]$ . A seguir, o nosso objetivo é mostrar que se  $\lambda$  é pequeno, então  $p_m \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ .

Seja  $\delta_2$  um real no intervalo  $(0, 1)$  tal que

$$\frac{1}{1 + \delta_1} < \delta_2 \quad (3.6)$$

e considere o evento

$A_n = \{\text{em } \mathcal{A}(K_0^n) \text{ existe uma componente conectada de diâmetro ao menos } \frac{n}{2} \text{ de cubos passáveis de nível } 3n^{\delta_2}\}$ .

**Lema 3.7.**

$$\mathbf{P}[A_n] \leq (n^{d(1-\delta_2)} (11^d p_{3n^{\delta_2}})^{k_0}) \quad (3.7)$$

onde

$$k_0 = \left\lfloor \frac{1}{30} \frac{n^{1-\delta_2}}{\sqrt{d}} \right\rfloor - 1.$$

*Demonstração.* Como o diâmetro de um cubo de nível  $m$  é  $m\sqrt{d}$ , no evento  $A_n$  existe um  $m' \in \mathbb{Z}^+$  e  $i_1, \dots, i_{m'} \in \mathbb{Z}^d$  tais que

- $K_{i_j}^{3n^{\delta_2}} \subset \mathcal{A}(K_0^n)$  para todo  $j = 1, \dots, m'$ ,
- $\|i_j - i_{j-1}\|_\infty = 1$  para todo  $j = 2, \dots, m'$ ,
- $\|i_0 - i_{m'}\|_\infty \geq \frac{1}{6} \frac{n^{1-\delta_2}}{\sqrt{d}}$ .

Defina-se agora  $\tau(1) := 1$  e

$$\tau(j) = \max\{\ell > \tau(j-1) : \|i_\ell - i_{\tau(j-1)}\|_\infty = 5\}$$

para  $j = 2, \dots, k_0$  (de fato, como  $5k_0 < \frac{1}{6} \frac{n^{1-\delta_2}}{\sqrt{d}}$ , temos que  $\tau(k_0) \leq m'$ ). Então a coleção  $\gamma = (K_{i_{\tau(1)}}^{3n^{\delta_2}}, \dots, K_{i_{\tau(k_0)}}^{3n^{\delta_2}})$  de cubos de nível  $3n^{\delta_2}$  tem as seguintes propriedades:

- $\gamma \subset \mathcal{A}(K_0^n)$ ,
- Para  $j = 1, \dots, k_0$  os cubos  $K_{i_{\tau(j)}}^{3n^{\delta_2}}$  são passáveis,
- $\|i_{\tau(j)} - i_{\tau(j-1)}\|_\infty = 5$ , para  $j = 2, \dots, k_0$ ,
- $\|i_{\tau(j')} - i_{\tau(j)}\|_\infty \geq 5$ , para  $j \neq j'$ .

Intuitivamente, esta coleção corresponde a um “caminho” de cubos passáveis dentro de  $\mathcal{A}(K_0^n)$ ; não obstante, os elementos vizinhos de esse caminho na realidade não são vizinhos: estão a uma distancia suficiente para fazer-os independentes. O número de coleções com tais propriedades é no máximo  $(n^{d(1-\delta_2)} 11^{dk_0})$ : o número máximo de possibilidades para escolher o primeiro cubo na coleção é  $(\frac{n}{n^{\delta_2}})^d$  e depois, em cada passo, há no máximo  $11^d - 9^d < 11^d$  possibilidades de escolher o seguinte. Para um  $\gamma$  fixo, pelo Lema 3.6, a probabilidade de que todos os cubos na coleção sejam passáveis é no máximo  $p_{3n^{\delta_2}}^{k_0}$ , o qual prova a desigualdade (3.7). □

**Lema 3.8.** Suponha-se que, para algum  $n > (4\sqrt{d})^{\delta_2^{-1}}$ , o cubo  $K_0^n$  é passável e o seguinte evento ocorre:

$$\left\{ \text{para todo } i \in \mathcal{A}(K_0^n) \cap \mathbb{Z}^d \text{ tem-se que } R_i < \frac{n^{\delta_2}}{2(\beta_d + 1)} \right\} \quad (3.8)$$

Então, para qualquer cubo de nível  $3n^{\delta_2}$  em  $\mathcal{A}(K_0^n)$  que intersecta com uma componente conectada de cubos pintados de nível 1 de  $\mathfrak{C}|_{\mathcal{A}(K_0^n)}$  com diâmetro ao menos  $n/2$  e tal que sua distancia até  $K_0^n$  é no máximo  $n/2$ , é passável e, em particular, o evento  $A_n$  ocorre.

*Demonstração.* Considere-se qualquer cubo de nível  $3n^{\delta_2}$  com as propriedades anteriores, por exemplo  $K_j^{3n^{\delta_2}}$ . Como  $\rho(K_0^n, K_j^{3n^{\delta_2}}) \leq n/2$ , temos que  $\mathcal{A}(K_j^{3n^{\delta_2}}) \subset \mathcal{A}(K_0^n)$  e então tem-se que, para todo  $x \in \mathcal{A}(K_j^{3n^{\delta_2}})$ ,  $R_x < \frac{n^{\delta_2}}{2(\beta_d + 1)}$ . Então, a segunda condição na Definição 3.5 é satisfeita. Seja

$$\mathfrak{K}(K_j^{3n^{\delta_2}}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \inf_{y \in K_j^{3n^{\delta_2}}} \|x - y\|_\infty \leq 2n^{\delta_2} \right\}.$$

Chame-se de  $r_1$  a expressão  $\frac{n^{\delta_2}}{2(\beta_d + 1)}$  e considere-se um cubo de nível 1  $K_l^1 \subset \mathfrak{K}(K_j^{3n^{\delta_2}})$  tal que  $K_l^1 \subset \mathfrak{C}|_{\mathcal{A}(K_0^n)}$ . No evento (3.8), isso quer dizer que existe  $i \in \mathcal{A}(K_0^n) \cap \mathbb{Z}^d$  tal que  $K_l^1 \subset B_i(r_1)$ . Pelo Lema 3.5 o evento  $\{R_i \leq r_1\}$  só depende da configuração dentro de  $B_i(\beta_d r_1)$ . Como  $r_1 + \beta_d r_1 + 2\sqrt{d} = (\beta_d + 1)r_1 + 2\sqrt{d} = \frac{n^{\delta_2}}{2} + 2\sqrt{d} < n^{\delta_2}$  (lembre-se da suposição de  $n^{\delta_2} > 4\sqrt{d}$ ), obtemos que  $B_i(\beta_d r_1)$  está completamente contida em  $\mathcal{A}(K_j^{3n^{\delta_2}})$ . Assim,  $K_l^1 \subset B_i\left(R_i^{\mathcal{A}(K_j^{3n^{\delta_2}})}\right)$  e por tanto  $\mathfrak{K}(K_j^{3n^{\delta_2}})$  intercepta uma componente conexa de diâmetro ao menos  $2n^{\delta_2}$  de cubos de nível 1 em  $\mathfrak{C}|_{\mathcal{A}(K_j^{3n^{\delta_2}})}$ . Isso implica que  $K_j^{3n^{\delta_2}}$  é passável.  $\square$

Agora as condições estão dadas para provar o Teorema 3.1: Abrevie-se  $\varepsilon_d = 11^{-d}/2$ . Escolha-se  $m_0$  suficientemente grande tal que

$$m \geq (4\sqrt{d})^{\delta_2^{-1}} \quad (3.9)$$

$$m^{1/2} \leq \left\lfloor \frac{1}{30} \frac{m^{1-\delta_2}}{\sqrt{d}} \right\rfloor - 1 \quad (3.10)$$

$$m^{1-\delta_2} \leq 3m \quad (3.11)$$

$$(11^d \varepsilon_d)^{m^{1/2}} \leq m^{-d(1+\delta_1)\delta_2} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_d > (3m)^d \left[ (11^d \varepsilon_d)^{m^{1/2}} + c'_3 m^{-d(1+\delta_1)\delta_2} + e^{-c'_2 m^{d\delta_2}} + e^{-m^{d\delta_2}} \right] \quad (3.13)$$

para todo  $m \geq m_0$ . Além disso, escolha  $\lambda$  pequeno o suficiente para que

$$c'_1(\lambda) \geq \max \{1, c'_2\} \quad (3.14)$$

$$\exp \{ -\lambda(3m_0)^d \} > 1 - \varepsilon_d \quad (3.15)$$

onde  $c'_i = 2^{-d}(\beta_d + 1)^{-d} c_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . Note-se que a primeira condição sobre o  $\lambda$  garante que o último termo em (3.13) decresce mais rápido que o penúltimo. Seja  $n \geq m_0$ , usando primeiro o Lema 3.8 junto com (3.9), e depois o Lema 3.7 junto com o Lema (3.1) obtém-se que

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbf{P}[K_0^n \text{ é passável}] \\ &\leq \mathbf{P}[A_n] + \mathbf{P} \left[ \text{existe } i \in \mathcal{A}(K_0^n) \cap \mathbb{Z}^d : R_i \geq \frac{n^{\delta_2}}{2(\beta_d + 1)} \right] \\ &\leq n^{d(1-\delta_2)} (11^d p_{3n^{\delta_2}})^{k_0} + (3n)^d \left\{ c'_3 n^{-d(1+\delta_1)\delta_2} + e^{-c'_2 n^{d\delta_2}} + e^{-c'_1(\lambda) n^{d\delta_2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

A condição (3.15) implica que, para qualquer  $m \leq m_0$ , tem-se que  $p_m < \varepsilon_d$  (isso porque, com probabilidade ao menos  $e^{-\lambda(3m_0)^d}$  não haverá centros em  $\mathcal{A}(K_0^m)$ , nesse caso  $K_0^m$  não é passável). Então, voltando ao caso  $n > m_0$ , se  $p_{3n^{\delta_2}} < \varepsilon_d$  tem-se

$$\begin{aligned} p_n &\leq n^{d(1-\delta_2)} (11^d p_{3n^{\delta_2}})^{k_0} + (3n)^d \left\{ c'_3 n^{-d(1+\delta_1)\delta_2} + e^{-c'_2 n^{d\delta_2}} + e^{-n^{d\delta_2}} \right\} \\ &\leq n^{d(1-\delta_2)} (11^d \varepsilon_d)^{k_0} + (3n)^d \left\{ c'_3 n^{-d(1+\delta_1)\delta_2} + e^{-c'_2 n^{d\delta_2}} + e^{-n^{d\delta_2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (3n)^d (11^d \varepsilon_d)^{n^{1/2}} + (3n)^d \left\{ c'_3 n^{-d(1+\delta_1)\delta_2} + e^{-c'_2 n^{d\delta_2}} + e^{-n^{d\delta_2}} \right\} \\ &\leq \varepsilon_d \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde a primeira desigualdade é obtida ao usar (3.14), a terceira ao usar (3.10) e (3.11), e a quarta ao usar (3.13). Por indução (3.17) implica que  $p_n < \varepsilon_d$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ : usando os cálculos anteriores tem-se que  $(\forall m \leq m_0)(p_m < \varepsilon_d) \Rightarrow (\forall m \leq (m_0/3)^{-\delta_2})(p_m < \varepsilon_d)$  e assim para o frente. Ainda mais, repetindo o processo anterior tem-se que

$$\begin{aligned} p_n &\leq (3n)^d (11^d \varepsilon_d)^{n^{1/2}} + (3n)^d \left\{ c'_3 n^{-d(1+\delta_1)\delta_2} + e^{-c'_2 n^{d\delta_2}} + e^{-n^{d\delta_2}} \right\} \\ &\leq 4(3n)^d n^{-d(1+\delta_1)\delta_2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde (3.18) obtém-se ao usar (3.12); assim  $p_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  (pela definição de  $\delta_2$  em (3.6)). Usando (2.4) pode-se escrever (lembre-se que  $c(\lambda) > c'(\lambda) \geq 1$ )

$\mathbf{P}[K_0^n$  intersecte uma componente conectada de diâmetro ao menos  $n/2$   
de cubos pintados de nível-1]

$$\begin{aligned} &\leq \mathbf{P}[K_0^n \text{ é passável}] + \mathbf{P} \left[ \text{existe } i \in \mathcal{A}(K_0^n) \cap \mathbb{Z}^d : R_i \geq \frac{n}{6(\beta_d + 1)} \right] \\ &\quad + \mathbf{P} \left[ \text{existe } i \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{A}(K_0^n) : R_i \geq \rho(\{i\}, K_0^n) \right] \\ &\leq p_n + (3n)^d \left\{ c_3 \left( \frac{n}{6(\beta_d + 1)} \right)^{-d(1+\delta_1)} + e^{-c_2 \left( \frac{n}{6(\beta_d + 1)} \right)^d} + e^{-c_1(\lambda) \left( \frac{n}{6(\beta_d + 1)} \right)^d} \right\} \\ &\quad + c_4 \sum_{|\ell|=n} |\ell|^{d-1} \mathbf{P}[R_\ell \geq |\ell|] \\ &\leq p_n + (3n)^d \left\{ c_3 \left( \frac{n}{6(\beta_d + 1)} \right)^{-d(1+\delta_1)} + e^{-c_2 \left( \frac{n}{6(\beta_d + 1)} \right)^d} + e^{-c_1(\lambda) \left( \frac{n}{6(\beta_d + 1)} \right)^d} \right\} \\ &\quad + c_4 \sum_{|\ell|=n} |\ell|^{d-1} \left\{ c_3 |\ell|^{-d(1+\delta_1)} + e^{-c_2 |\ell|^d} + e^{-c_1(\lambda) |\ell|^d} \right\} \\ &\leq 4(3n)^d n^{-d(1+\delta_1)\delta_2} \\ &\quad + (3n)^d \left\{ c_3 \left( \frac{n}{6(\beta_d + 1)} \right)^{-d(1+\delta_1)} + e^{-c_2 \left( \frac{n}{6(\beta_d + 1)} \right)^d} + e^{-c_1(\lambda) \left( \frac{n}{6(\beta_d + 1)} \right)^d} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +c'_4 \sum_{|\ell|=n}^{\infty} |\ell|^{-(1+d\delta_1)} \\
 & \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, tem-se provado que pode-se escolher  $\lambda$  bastante pequeno para obter que

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}[K_0^n \text{ intersecte uma componente conectada de diâmetro ao menos } n/2 \\
 & \text{de cubos pintados de nível-1}] \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Note-se que como  $\mathcal{C} \subset \mathfrak{C}$ ,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}[K_0^n \text{ intersecte uma componente conectada de diâmetro ao menos } n/2 \\
 & \text{de cubos pintados de nível-1}] \\
 & \geq \mathbf{P}[0 \text{ pertença a um subconjunto não limitado de } \mathcal{C}]
 \end{aligned}$$

e a última probabilidade é estritamente positiva se há percolação. Assim, não há percolação quando  $\lambda$  é suficientemente pequeno e a parte (i) do Teorema 3.1 está provada. Para a parte (ii) do Teorema, denota-se por  $H_2 \subset \mathbb{R}^d$  o plano bidimensional, agora pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 & \{\text{não existe uma componente conexa não limitada em } \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}\} \\
 & \subset \{\forall W \subset H_2 \text{ tal que } W \text{ é limitado há um contorno ao redor de } W \text{ em } \mathcal{C} \cap H_2\} \\
 & \subset \{\forall W \subset H_2 \text{ tal que } W \text{ é limitado há um contorno ao redor de } W \text{ em } \mathfrak{C} \cap H_2\} \\
 & \subset \{\text{para um número infinito de cubos } K_0^n, n = 1, 2, 3, \dots, K_0^n \text{ intercepta uma} \\
 & \text{componente conexa de diâmetro ao menos } n/2 \text{ de cubos pintados de nível-1}\}
 \end{aligned}$$

Por (3.19) e o lema de Borel-Cantelli, para  $\lambda$  pequeno o suficiente, a probabilidade do último evento é 0 e portanto a parte (ii) do Teorema 3.1 está provada.

Como Freire, Popov e Vachkovskaia deixam claro em [3], não importa se o resultado final foi obtido para  $\lambda$  pequeno e não para  $\alpha$  pequeno, como estava dito no Teorema 3.1. Isso não afecta muito pelo seguinte motivo: ao

re-escalar o espaço por um fator  $b$  (uma função  $x \mapsto bx$ ), então obtém-se o modelo com intensidade de Poisson  $\lambda/b^d$  e apetite  $\alpha b^d$ . Assim, as propriedades geométricas do modelo não mudam com a transformação e o produto do novo apetite com a nova intensidade também não muda. Em particular, isso prova que as propriedades do modelo só dependem do produto  $\lambda\alpha$ . Essa anotação também será importante para entender a prova na parte seguinte, onde é usada uma outra forma de obter o mesmo resultado.

## 3.2 Método de Gouéré

Em [6] recentemente demonstrou-se um Teorema relevante para o desenvolvimento deste capítulo. Nesse artigo Gouéré provou resultados interessantes para alguns modelos (como o PL com apetite constante) na fase subcrítica. Esses resultados estavam baseados num artigo prévio dele ([5]) no qual obtinha importantes melhorias nos desenvolvimentos conhecidos até agora da fase subcrítica de percolação no modelo Booleano (veja-se a seção 3.3 de [14] para ter uma ideia desses resultados prévios). Então o Teorema que é de interesse nesta tese permite construir uma demonstração alternativa do Teorema 3.1 baseado nos resultados obtidos em [5]. Vai-se enunciar primeiro o Teorema (sem prova) e depois vai ser gerado um modelo Booleano que domina o modelo PLA para conseguir usar dito resultado:

**Teorema 3.2** (Teorema de Gouéré). Seja  $\Pi'$  um processo pontual em  $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$  tal que a lei de  $\Pi'$  é invariante a translações. Suponha-se também que a medida de  $\Pi'$  é localmente finita (assim a intensidade de  $\Pi'$  é o produto da medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$  vezes uma medida localmente finita em  $(0, \infty)$ ). Seja  $C > 0$  constante. Então existe uma constante  $H(d, C) > 0$ , tal que, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

**P0** Para todo  $r > 0$  e todo  $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0, Cr)$ , os processos pontuais

$$\Pi' \cap B(0, r) \times (0, r] \text{ e } \Pi' \cap B(x, r) \times (0, r]$$

são independentes.

**P1**  $\sup_{r>0} r^d \nu([r, \infty)) \leq H$ .

**P2** A seguinte integral é finita:

$$\int_{[1,\infty)} \beta^d \nu(d\beta),$$

então o conjunto  $S$ , a componente conectada de  $\Pi'$  que contém a origem, é limitado q.c. Se ademais satisfaz-se o seguinte:

**P3**

$$\int_{[1,\infty)} \beta^{d+s} \nu(d\beta) < \infty,$$

então  $\mathbf{E}[M^s] < \infty$ , onde  $M = \sup_{x \in S} \|x\|$ .

Agora gera-se um processo que domina o modelo PLA. Suponha-se que  $\Pi$  é um processo pontual de Poisson em  $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$  cuja medida de intensidade é a medida de Lebesgue. Para todo  $z \in \Pi$ , define-se assim  $R(z, \Pi)$ :

$$R(z, \Pi) = \inf \left\{ r > 0 : \sum_{\xi \in \bar{B}(z, 2r)} \alpha V_\xi \leq \pi_d(z) r^d \right\},$$

inf  $\emptyset = \infty$ . Aqui  $\pi_d(z) r^d$  é a medida de Lebesgue da bola com centro em  $z$  e raio  $r$  em  $d$  dimensões. Define-se um processo Booleano como

$$\Pi' = \{(z, 2R(z, \Pi)), z \in \Pi\}.$$

É preciso notar que a lei de  $\Pi'$  é invariante a translações em  $\mathbb{R}^d$  e que a medida de intensidade de  $\Pi'$  é localmente finita. Assim, a medida de intensidade é o produto da medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$  vezes uma medida localmente finita em  $(0, \infty]$ . Chama-se de  $\nu$  essa medida de intensidade, e de probabilidade, em  $(0, \infty]$ . Ter definido o processo Booleano como  $\Pi'$  sugere (corretamente) que o Teorema 3.2 pode-se usar sobre  $\Pi'$ .

Como consequência do Teorema 3.2 temos o seguinte teorema concernente à prova alternativa do Teorema 3.1:

**Teorema 3.3.** Seja  $\alpha_i = \alpha V_i$  uma seqüência de variáveis aleatórias positivas *iid* e seja  $0 < \delta_1 < 1$  onde  $V_i$  e  $\delta_1$  satisfazem as mesmas propriedades do Teorema 3.1. Seja  $D$  o diâmetro da componente conectada de  $\mathcal{C}$  que contém a

origem. Então, para todo  $s$  existe  $\alpha$  pequeno o suficiente, tal que  $\mathbf{E}D^s < \infty$ . Por conseqüência não há percolação de  $\mathcal{C}$ .

A prova do Teorema 3.3 é direta depois de verificar as condições do Teorema 3.2, mas para estar em posição de usá-lo neste caso precisa-se dos seguintes dois lemas:

**Lema 3.9.** Para  $\alpha$  pequeno o suficiente, o conjunto  $\mathcal{C}$  quase certamente está contido no conjunto  $\Sigma$ , onde  $\Sigma$  é a união de todas as bolas do processo Booleano  $\Pi'$ .

*Demonstração.* Seja  $z \in \Pi$ . Lembre-se que  $R(z, \Pi)$  é finito. Para provar o lema só é preciso checar que  $\psi^{-1}(z) \subset \overline{B}(z, R)$ , onde  $R = R(z, \Pi)$ . Tem-se:

$$\sum_{\xi \in \overline{B}(z, 2R)} \alpha V_\xi = \pi_d(z) R^d.$$

Seja  $\varepsilon > 0$  tal que não existe nenhum ponto de  $\Pi$  em  $\overline{B}(z, 2R + 2\varepsilon) \setminus \overline{B}(z, 2R)$ . Então tem-se:

$$\sum_{\xi \in \overline{B}(z, 2R + 2\varepsilon)} \alpha V_\xi < \pi_d(z) (R + \varepsilon)^d.$$

Portanto:

$$|\psi^{-1}(\Pi \cap \overline{B}(z, 2R + 2\varepsilon))| < \pi_d(z) (R + \varepsilon)^d.$$

Em conseqüência, existe  $x \in B(z, R + \varepsilon)$  tal que  $\psi(x) \in \Pi \cup \{\infty\} \setminus \overline{B}(z, 2R + 2\varepsilon)$ . Se  $\psi(x) \in \Pi$ ,

$$\|x - \psi(x)\| > R + \varepsilon \text{ e } \|x - z\| \leq R + \varepsilon.$$

Assim,  $x$  deseja ao centro  $z$ . Se  $\psi(x) = \infty$ ,  $x$  também deseja ao centro  $z$ . Como  $\psi$  é uma alocação estável, tem-se que  $z$  não cobiça ao ponto  $x$ . Consequentemente,  $\psi^{-1}(z) \subset \overline{B}(z, \|x - z\|)$  e então  $\psi^{-1}(z) \subset \overline{B}(z, R + \varepsilon)$ . Como o resultado é válido para  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno, obtém-se que  $\psi^{-1}(z) \subset \overline{B}(z, R)$ . Deste modo, o lema fica demonstrado.  $\square$

Note-se a similaridade do Lema anterior com a segunda parte da prova do Lema 3.2.

**Lema 3.10.** Dadas as mesmas condições do Teorema 3.3 tem-se que para  $\lambda$  pequeno o suficiente e  $r > 0$ ,  $\nu((r, \infty]) \leq c\lambda r^{-d(1+\delta_1)}$ , onde  $c \in \mathbb{R}^+$ .

*Demonstração do Lema 3.10.* Seja  $r > 0$ . Por definição de  $\nu$  e  $\Pi$  tem-se:

$$\begin{aligned} \nu((r, \infty]) &= \mathbf{E}(|\Pi' \cap [0, 1]^d \times (r, \infty]|) \\ &= \mathbf{E} \left( \sum_{z \in \Pi \cap [0, 1]^d} 1_{2R(z, \Pi) > r} \right) \\ &= \lambda \mathbf{P} [R(z, \Pi) > r/2] \\ &\leq \lambda \mathbf{P} \left[ \sum_{\xi \in \bar{B}(z, r)} V_\xi > \pi_d(z) r^d 2^{-d} \alpha^{-1} \right] \end{aligned}$$

Agora é preciso fazer uma análise similar à feita para obter a desigualdade do Lema 3.1. Para  $a \in (1, r)$  sejam  $K = \lceil \pi_d r^d a^d \rceil$  e  $N \sim \mathcal{P}(\lambda \pi_d r^d a^d)$ , então  $N$  domina a  $\Pi \cap \bar{B}(z, r)$ . Sejam  $V'_i = V - \mu$  e  $x = \pi_d r^d 2^{-d} \alpha^{-1} - K\mu$  (note-se que  $x$  é da ordem de  $r^d$ ). Com essas considerações tem-se:

$$\begin{aligned} \nu((r, \infty]) &\leq \lambda \mathbf{P} \left[ \sum_{k=1}^N V_k > \pi_d(z) r^d 2^{-d} \alpha^{-1} \right] \\ &\leq \lambda \left\{ \mathbf{P} \left[ \sum_{k=1}^N V_k > \pi_d(z) r^d 2^{-d} \alpha^{-1} \mid N \leq K \right] \mathbf{P}[N \leq K] + \mathbf{P}[N > K] \right\} \\ &\leq \lambda \left\{ \mathbf{P} \left[ \sum_{k=1}^K V'_k > x \right] + \mathbf{P}[N > K] \right\} \end{aligned}$$

Fazendo uma análise semelhante à feita no Lema 3.1 obtém-se:

$$\nu((r, \infty]) \leq \lambda \left\{ c_3 r^{-d(1+\delta_1)} + e^{-c_2 r^d} + e^{-c_1(\lambda) r^d} \right\}$$

$$\leq c\lambda r^{-d(1+\delta_1)}$$

A última desigualdade obtém-se para  $\lambda$  pequeno e porque o primeiro termo, que decresce mais lento que os outros termos dentro das chaves, é da ordem  $r^{-d(1+\delta_1)}$  pois  $K = \lceil \pi_d r^d \rceil$ . Note-se que a última expressão vai para zero quando  $\lambda \rightarrow 0$ .

□

*Demonstração do Teorema 3.3.* Uma vez provados os lemas anteriores, a prova deste teorema é similar à prova feita pelo Gouéré em [5]. Por causa do Lema 3.9, é suficiente checar que  $\Pi'$  satisfaz as propriedades do Teorema 3.2.

**P0.** A propriedade é satisfeita quando  $C = 7$ . Seja  $r > 0$ . Para todo  $z \in \Pi$  define-se

$$\tilde{R}(z, \Pi) = \inf \left\{ s \in [0, r] : \sum_{\xi \in \bar{B}(z, 2s)} \alpha V_\xi \leq \pi_d(z) s^d \right\}$$

Define-se  $\tilde{R}(z, \Pi) = r$  se não existe tal  $s$ . Note-se que, para todo  $z \in \Pi$ , tem-se que se  $R(z, \Pi) < r$  ou  $\tilde{R}(z, \Pi) < r$ , então  $\tilde{R}(z, \Pi) = R(z, \Pi)$ . Assim,

$$\Pi' \cap \mathbb{R}^d \times [0, r) = \tilde{\Pi}' \cap \mathbb{R}^d \times [0, r)$$

onde  $\tilde{\Pi}' = \{(z, 2\tilde{R}(z, \Pi)), z \in \Pi\}$ . Em consequência tem-se que  $\Pi' \cap B(x, r) \times [0, r)$  só depende de  $\Pi \cap B(x, 3r)$ , para todo  $r \in \mathbb{R}^d$ . Pela propriedade de independência dos processos pontuais de Poisson obtém-se que, se  $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0, 6r)$ , os processos pontuais  $\Pi' \cap B(0, r) \times [0, r)$  e  $\Pi' \cap B(x, r) \times [0, r)$  são independentes. A propriedade é satisfeita.

**P1.** Pelo Lema 3.10 tem-se:

$$\sup_{r>0} r^d \nu([r, \infty)) = \max \left\{ \sup_{r \in (0, 1]} r^d \nu([r, \infty)), \sup_{r>1} r^d \nu([r, \infty)) \right\}$$

Note-se que para o segundo termo nas chaves

$$\sup_{r>1} r^d \nu([r, \infty)) \leq \sup_{r>1} r^d c \lambda r^{-d(1+\delta_1)}$$

$$\begin{aligned}
&= c\lambda \sup_{r>1} r^{-\delta_1} \\
&= c\lambda
\end{aligned}$$

pois  $r^{-\delta_1}$  é decrescente. Para o primeiro termo nas chaves tem-se:

$$\sup_{r \in (0,1]} r^d \nu([r, \infty)) \leq c\lambda \sup_{r \in (0,1]} r^{-\delta_1}$$

e a expressão na direita vai para 0 quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Note-se também que  $\nu([0, \infty)) \leq \lambda$  (veja-se a primeira desigualdade do Lema 3.10). Assim a propriedade se satisfaz para  $\lambda$  pequeno o suficiente.

**P2 e P3.** Pelo Lema 3.10 obtemos:  $\int_{(0,\infty)} r^{d+s} \nu(dr) < \infty$  para todo  $s$ , dado  $\lambda$  pequeno o suficiente.

Quando o  $\lambda$  é pequeno o suficiente, então pode-se usar o Teorema 3.2. Obtém-se que  $\mathbf{E}M^s < \infty$ , para todo  $s$ . Pelo Lema 3.9, obtém-se que  $\mathbf{E}D^s < \infty$ .

□

# Capítulo 4

## Caudas

Neste capítulo vamos provar resultados sobre as caudas de alguns valores de interesse. Em particular, a distância de um típico lugar até o seu centro, que chamaremos de  $X$  e que pela invariância pode-se definir

$$X = |0 - \Psi(0)|.$$

A distância desde um centro até o seu ponto mais distante, vai-se chamar de  $R$  e, pela invariância, pode-se definir como

$$R(\xi) = \text{ess sup}_{x \in \Psi^{-1}(\xi)} |\xi - x|$$

onde, se  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  é uma função mensurável num espaço de medida  $(\mathbf{X}, \mathcal{F}', \nu)$  a um conjunto parcialmente ordenado  $\mathbf{Y}$  (não necessariamente mensurável), o *supremo essencial* de  $f$  se define como:

$$\text{ess sup } f := \inf\{a \in \mathbf{Y} : \nu\{x \in \mathbf{X} : f(x) > a\} = 0\}.$$

Seja  $[\Pi^*]$  o suporte da versão de Palm dum processo pontual ergódico com suporte  $[\Pi]$ , lei  $\mathbf{P}^*$  e esperança  $\mathbf{E}^*$  e seja  $R^* = R_{\Psi_{\Pi^*}}(0)$  o raio dum centro típico. Finalmente, como no capítulo anterior, seja  $\alpha = \alpha V$ , onde  $\alpha$  é constante e  $V$  é uma seqüência de v.a. com distribuição  $F$  e esperança  $\mu$ , e seja  $\alpha_\xi$  a realização do apetite de  $\xi$ .

### 4.1 Cota crítica em dimensão 1

Vai-e começar usando o seguinte lema válido em toda dimensão:

**Lema 4.1.** Seja  $\Xi$  um conjunto discreto de centros sem pontos limite em  $\mathbb{R}^d$ , então para todo  $\xi \in \Xi$  existe  $\delta_\xi$  tal que  $B(\xi, \delta_\xi) \subset \psi^{-1}(\xi)$ ,  $\mathcal{L}$ -q.c.

*Demonstração.* Suponha que a afirmação é falsa e seja  $\xi$  o centro com apetite  $\alpha_\xi$  para o qual não se cumpre. Então para todo  $\delta$ , a bola  $B(\xi, \delta)$  não está contida em  $\psi^{-1}(\xi)$ . Em particular para  $\delta < (\alpha_\xi \pi_d^{-1})^{1/d}$  existe  $x \in B(\xi, \delta)$  tal que  $x \notin \psi^{-1}(\xi)$ . Então existe um centro  $\xi' \neq \xi$  tal que  $|\xi' - x| < |\xi - x|$  e  $x \in \psi^{-1}(\xi')$  (pela estabilidade do par  $(x, \xi)$  não é possível ter  $\psi(x) = \infty$ ), mas quando  $\delta \rightarrow 0$  quer dizer que  $\xi' \rightarrow \xi$ , uma contradição.  $\square$

Dado um conjunto de pontos  $\Xi \subset \mathbb{R}$  seja  $A(s, t] = \sum_{\xi \in (s, t]} \alpha_\xi$  e seja  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\begin{aligned} G(0) &= \alpha_0, \\ G(t) - G(s) &= A(s, t] - (t - s). \end{aligned}$$

Note que para todo  $\xi \in \Xi$  tem-se que  $G(\xi^+) = G(\xi) = G(\xi^-) + \alpha_\xi$ , logo a restrição de  $G$  a  $\psi^{-1}(\xi)$  preserva a medida em  $[G(\xi^-) - G(\xi)]$ .

**Lema 4.2.** Seja  $\Xi \in \mathbb{R}$  um conjunto discreto de pontos e seja  $\psi$  uma alocação estável a  $\Xi$  com apetite dado pela v.a.  $\alpha$ .

- Suponha que  $t > \xi$  satisfaz  $\psi(t) = \xi$  e  $\mathcal{L}(\psi^{-1}(\xi) \cap [\xi, t]) = \beta$ . Então  $G(t) = G(\xi) - \beta$ .
- Suponha que  $s < \xi$  satisfaz  $\psi(s) = \xi$  e  $\mathcal{L}(\psi^{-1}(\xi) \cap [s, \xi]) = \gamma$ . Então  $G(t) = G(\xi^-) + \gamma$ .

*Demonstração.* Por simetria é suficiente provar o primeiro item. A prova será feita em quatro casos:

- A1** Suponha que  $G(t) > G(\xi) - \beta$ . Então  $A(\xi, t] > t - \xi - \beta \geq 0$ , logo existe um centro  $\eta \in (\xi, t]$ . Suponha primeiro que existe um conjunto de lugares de medida positiva  $s \notin (\xi, t]$  com  $\psi(s) = \eta$ . Se  $s > t$  ou  $\eta - s > t - \eta$ , então  $(t, \eta)$  é um par instável, uma contradição. Logo  $s \in [2\eta - t, \xi)$  para q.t.  $s$  como foi descrito, mas nesse caso  $(s, \xi)$  é um par instável, uma contradição.
- A2** Agora suponha que, nas mesmas condições do caso anterior, ( $A(\xi, t] > t - \xi - \beta \geq 0$ ), existe um conjunto finito de centros  $(\eta_i)_{i=1}^n$  com apetites totais dados por  $A(\xi, t]$ . Ou seja  $\beta = t - \xi - A(\xi, t]$ . Logo, pela definição de  $G$ ,

$$G(t) - G(\xi) = A(\xi, t] - (t - \xi) = -\beta.$$

Para provar que o valor de  $\beta$  é correto, só falta ver que para  $\mathcal{L}$ -q.t  $x \in (\xi, t]$ ,  $x$  só pode pertencer ao território dos centros  $\eta_1, \dots, \eta_m$  ou ao território de  $\xi$  pois já foi provado que  $(\xi, t]$  não pode ter centros com território de medida positiva fora do intervalo. Assim, suponha que existe  $\xi' < \xi$  tal que  $x \in \psi^{-1}(\xi')$  para algum  $x \in (\xi, t]$ , então  $(x, \xi)$  é um par instável. Se algum centro  $\xi' > t$  tem território de medida positiva em  $I$  então  $(t, \xi')$  é um par instável. Por último, se  $\psi(x) = \infty$  para algum  $x \in (\xi, t]$ , então  $(x, \xi)$  é um par instável.

- A3** Suponha que  $G(t) < G(\xi) - \beta$ . Então  $A(\xi, t] < t - \xi - \beta$  (com  $\beta < t - \xi$ ), logo existe um centro  $\eta \notin [\xi, t]$  e um conjunto de lugares com comprimento positivo  $s \in (\xi, t)$  com  $\psi(s) = \eta$ . Se  $\eta < \xi$  ou  $\eta - s > s - \xi$ , então  $(s, \xi)$  é um par instável, logo  $\eta \in [t, 2s - \xi)$  para q.t.  $s$ . Mas nessa situação  $(t, \eta)$  é um par instável.
- A4** No caso anterior, se  $\beta = t - \xi$  então q.t. lugar no intervalo  $(\xi, t]$  pertence ao centro  $\xi$ . Pelo lema 4.1 isso quer dizer que não há centros no intervalo  $(\xi, t]$ , logo  $A(\xi, t] = 0$ , logo  $G(t) = G(\xi) - \beta$ .

□

**Lema 4.3.** Seja  $\Xi$  um conjunto discreto de centros e seja  $\psi$  uma alocação estável a  $\Xi$  onde cada centro  $\xi \in \Xi$  tem apetite  $\alpha_\xi$  e está satisfeito. Suponha que  $0 \in \Xi$  e que  $x > 0$  satisfaz que  $G(t) < 0$  para toda  $t \in (x, 2x)$ . Então  $R(0) \leq x$ .

*Demonstração.* Seja  $r \leq x$  maximal tal que  $G(r^-) = 0$ . Chame  $D = \{y \in (0, r) : 0 < G(y) < \alpha_0\}$ . Considere os dois seguintes casos:

- C1** Existe um lugar  $t \in D$  tal que  $\psi(t) < 0$  ou  $\psi(t) > 2x$ . Neste caso, como existe um centro em 0, a estabilidade do par  $(0, t)$  implica que 0 está satisfeito no ponto  $r$ .
- C2**  $\psi(D) \subseteq [0, 2x]$ . O Lema 4.2 implica que  $\psi(D) \subseteq [0, r]$ . Como  $G(r) = G(0^-) = G(0)$ , os cruzamentos pela parte superior e a inferior de  $[0, \alpha_0]$  pela função  $G$  de 0 a  $r$  tem que ser iguais, quer dizer,

$$\sum_{\xi \in \Xi \cap [0, r]} \{[G(\xi) \wedge \alpha_0] - [G(\xi^-) \vee 0]\} = \mathcal{L}(D). \quad (4.1)$$

Como já foi dito,  $G$  preserva a medida do apetite de  $\xi$  no intervalo  $[G(\xi^-), G(\xi)]$ . Por isso, para todo centro  $\xi \in [0, r]$  temos

$$[G(\xi) \wedge \alpha_0] - [G(\xi^-) \vee 0] \geq \mathcal{L}[D \cap \psi^{-1}(\xi)]$$

e conjuntamente com a equação (4.2), temos que a desigualdade anterior deve ser igualdade. Em particular, quando  $\xi = 0$ , isto prova que  $R(0) \leq r \leq x$ .

□

Em [8] foi provado o seguinte resultado de passeios aleatórios, ele vai ser necessário na prova do teorema que se enunciara a continuação:

**Lema 4.4.** Seja  $\{X_j\}_{j \geq 1}$  uma seqüência de v.a. com media 0 e esperança  $\sigma^2 < \infty$ . Suponha  $X_j \geq -1$  q.c. e chame  $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$ . Defina

$$A_m := \{S_j > 1 \text{ para todo } j \in [2^{3m-1}, 2^{3m}]\}. \quad (4.2)$$

Então

$$\mathbf{P} \left( \bigcap_{k=1}^m A_k^c \right) \leq C_1 \theta^m$$

para algum  $\theta < 8^{-1/35.2}$  e  $C_1 < \infty$ .

**Teorema 4.1.** Seja  $\Pi$  um processo de renovação estacionário. Seja  $[\Pi^*] = \{\xi_j : j \in \mathbb{Z}\}$  onde  $(\xi_j)$  é uma sequência crescente. Então  $(\xi_j)$  é um passeio aleatório bidirecional com  $\xi_0 = 0$ . Vamos assumir que  $\xi_j - \xi_{j-1}$  tem media 1 e variância finita  $\sigma^2$ . Existe uma constante  $C < \infty$  que depende da lei de  $\xi_j - \xi_{j-1}$  tal que para todo  $r > 1$ ,

$$\mathbf{P}[R^* > r] \leq Cr^{-1/17.6}.$$

*Demonstração.* Seja  $X_j = \xi_j - \xi_{j-1} - 1$  de modo que  $S_j = \xi_j - j$ . No evento  $A_m$  definido no Lema 4.4 temos que  $\xi_j > j + 1$  para todo  $j \in [M/2, M)$ , onde  $M = 2^{3m}$ . Então, no evento  $A_m$  temos que  $G(t) < 0$  para todo  $t \in [M/2, M)$ , logo  $R(0) < M/2$  pelo Lema 4.3. Então

$$\{R(0) \geq M/2\} \subseteq \bigcap_{k=1}^m A_k^c.$$

Até este ponto, só tem-se considerado os centros na parte positiva do eixo. Ao considerar os eventos simétricos no eixo negativo, obtém-se

$$\mathbf{P}^*[R(0) \geq M/2] \leq \mathbf{P}^* \left[ \bigcap_{k=1}^m A_k^c \right]^2 \leq C_0 8^{-m/17.6} \leq C_0 M^{-1/17.6}.$$

Dado  $r > 1$  pode-se escolher  $m$  maximal tal que  $M/2 = 2^{3m-1} \leq r$ . Como  $C_0 M^{-1/17.6} \leq Cr^{-1/17.6}$  para  $C$  adequada, obtém-se o teorema.  $\square$

**Teorema 4.2 (Cota superior crítica e subcrítica em dimensão 1).** Seja  $\Pi$  um processo de Poisson com intensidade  $\lambda = 1$  e  $d = 1$ . Se  $\mathbf{E}\alpha \leq 1$  então  $\mathbf{E}^*[R^*]^{1/18} < \infty$ .

*Demonstração.* É direta do teorema 4.1.  $\square$

## 4.2 Caudas explícitas

No capítulo anterior foi necessário usar resultados de Chernoff e Nagaev. Nesta seção vão ser desenvolvidos resultados para as caudas de  $X$ , a distância dum ponto ao seu centro. Para isto são necessários outros dois resultados

de Nagaev enunciados a continuação:

**Proposição 4.1 (Corolário 1.8 em [15]).** Suponha que  $(X_i)$  é uma sequência de v.a. *iid* com  $\mathbf{E}X_1 = 0$  e variância  $\sigma^2$ , se  $A_2^+ = \int_{u \geq 0} u^2 dF(u)$  então

$$\mathbf{P} \left[ \sum_{i=1}^n X_i \geq x \right] \leq \frac{4nA_2^+}{x^2} + \exp \left\{ \frac{-8x^2}{ne^2\sigma^2} \right\}$$

**Proposição 4.2 (Corolário 1.12 em [15]).** Suponha que  $(X_i)$  é uma sequência de v.a. *iid* com  $\mathbf{E}X_1 = 0$ ,  $X_1 \leq M$  e variância  $\sigma^2$ . Seja  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  então

$$\mathbf{P}[S_n \geq x] \leq \exp \left[ x/M - (x/M + n\sigma^2/M^2) \log \left( \frac{xM}{n\sigma^2} + 1 \right) \right].$$

Para o seguinte Teorema de caudas explícitas vai-se precisar de muitos conceitos já definidos na primeira seção do capítulo anterior, eles vão-se mencionar quando for preciso.

**Teorema 4.3.** Seja  $\Pi$  um processo de Poisson em  $\mathbb{R}^d$  com intensidade 1 e considere uma alocação estável com apetite  $\alpha V$ .

- (i) Se  $V$  é uma v.a. com distribuição  $F$ , média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Fixe-se  $\alpha > 2^d/\mu$ , então  $\mathbf{E}[X^d | X < \infty] < \infty$ .
- (ii) Seja  $V$  uma v.a. com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Fixe-se  $\alpha^{-1} > 2^d\mu$  e seja  $V$  limitada superiormente por uma constante  $M$ . Então existe uma constante positiva  $c$  tal que

$$\mathbf{E}^* e^{c'(R^*)^d} < \infty$$

para todo  $c' \leq c$ .

*Demonstração.* Para provar (i) seja  $Z$  a quantidade de centros em  $B(0, r) \cap [\Pi]$  onde  $r > 0$ , então  $Z$  é Poisson com média  $\pi_d r^d$ . Agora, selecione-se um  $\delta \in \mathbb{R}^+$  pequeno e quando  $\alpha V < \delta$  para um centro  $\xi$  defina o apetite de  $\xi$  igual a  $\delta$ . Assim, caso  $Z > \delta^{-1} \pi_d 2^d r^d$ , o ínfimo do território destes centros está dado por  $\pi_d 2^d r^d$ , logo ao menos um centro  $\xi \in [\Pi] \cap B(0, r)$  tem território fora da bola  $B(0, 2r)$ . Assim, a estabilidade do par  $(0, \xi)$  implica que 0 pertence ao território de  $\xi$  ou ao território de algum centro mais próximo a 0 do que  $\xi$ . Então

$$X_\delta \leq |\xi| \leq r \quad (4.3)$$

onde  $X_\delta$  é a distância da origem ao seu centro no modelo com apetite limitado por baixo pela constante  $\delta$  (note-se que  $X \leq X_\delta$  se  $X < \infty$ ). Logo, usando a mesma ideia da prova na Proposição 3.1, da desigualdade (4.3) tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X_\delta > r] &\leq \mathbf{P} \left[ \sum_{\xi \in B(0, r)} \alpha V_\xi < \pi_d 2^d r^d \right] \\ &= \mathbf{P} \left[ \sum_{i=1}^Z V_i \leq \pi_d 2^d r^d \alpha^{-1} \mid Z \geq K \right] \mathbf{P}[Z \geq K] + \mathbf{P}[Z < K] \\ &\leq \mathbf{P} \left[ \sum_{i=1}^{\lfloor K \rfloor} V_i \leq \pi_d 2^d r^d \alpha^{-1} \right] + \mathbf{P}[Z < K] \\ &= \mathbf{P} \left[ \sum_{i=1}^{\lfloor K \rfloor} -V'_i \geq -v \right] + \mathbf{P}[Z < K] \\ &\leq \frac{4 \lfloor K \rfloor A_2^+}{(-v)^2} + \exp \left\{ \frac{-8(-v)^2}{\lfloor K \rfloor e^2 \sigma^2} \right\} + e^{-\pi_d r^d g(\pi_d r^d / \lfloor \pi_d r^d - 1 \rfloor)}, \end{aligned}$$

onde  $V'_k = V_k - \mu$  para  $k = 0, 1, \dots, K$ ,  $K = \pi_d r^d - 1$ ;  $v = \pi_d 2^d r^d \alpha^{-1} - K\mu = \pi_d r^d (2^d \alpha^{-1} - \mu) + \mu$ . Assim, pela definição de  $\alpha$  o primeiro termo é negativo, logo  $v$  será negativo quando  $r > [\mu / \pi_d (2^d \alpha^{-1} - \mu)]^{d^{-1}}$ . A última

desigualdade obtêm-se ao usar o Lema 4.1 e a desigualdade de Chernoff no Lema 3.4. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X_\delta > r] &\leq c_1 r^{-d} + e^{-c_2 r^d} + e^{-c_3 r^d} \\ &\leq 3c_1 r^{-d}. \end{aligned}$$

onde  $c_3 < \pi_d g(\pi_d r^d / \lfloor \pi_d r^d - 1 \rfloor)$ ,  $c_2 < 8/(e^2 \sigma^2)$  e  $c_1 < 4A_2^+$ . Finalmente como  $X_\delta$  domina pontualmente a  $X$  obtêm-se o resultado.

Para provar (ii) chame de  $Z'$  a quantidade de centros em  $B(0, 2r) \cap [\Pi^*]$ , logo  $Z' - 1 \sim \mathcal{P}(\pi_d 2^d r^d)$ . Caso  $Z' < M^{-1} \pi_d r^d$  tem-se que,  $\mathbf{P}$ -q.c. e  $F$ -q.c,  $\sum_{\xi \in B(0, 2r)} \alpha V_\xi \leq \pi_d r^d$  ou equivalentemente  $\sum_{\xi \in B(0, 2r)} V_\xi \leq \pi_d r^d \alpha^{-1}$ . Logo existe um conjunto  $L \subset B(0, r)$  tal que  $\mathcal{L}L > 0$  e tal que dado  $x \in L$ ,  $x$  não pertence ao território dos centros em  $B(0, 2r) \cap [\Pi^*]$ . Assim, a estabilidade do par  $(x, 0)$  implica que o apetite de 0 foi satisfeito dentro da bola fechada  $B[0, |x|]$ . Então

$$R^* < |x| < r.$$

Assim, usando a mesma notação da parte (i), obtêm-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[R^* > r] &\leq \mathbf{P} \left[ \sum_{k=0}^{Z'} \alpha V_k > \pi_d r^d \right] \\ &\leq \mathbf{P} \left[ \sum_{k=0}^{Z'} \alpha V_k > \pi_d r^d \mid Z' \leq K \right] \mathbf{P}[Z' \leq K] + \mathbf{P}[Z' > K] \\ &\leq \mathbf{P} \left[ \sum_{k=0}^{\lceil K \rceil} V'_k > v \right] + \mathbf{P}[Z' > K] \\ &\leq e^{v/M - [v/M + (\lceil K \rceil + 1)\sigma^2/M^2] \log\left(\frac{vM}{(\lceil K \rceil + 1)\sigma^2} + 1\right)} + e^{-\pi_d 2^d r^d g(\pi_d 2^d r^d / K)}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde  $V'_k = V_k - \mu$  para  $k = 0, 1, \dots, K$ ;  $K = \pi_d 2^d r^d + 1$ ;  $v = \pi_d r^d \alpha^{-1} - K\mu = \pi_d r^d (\alpha^{-1} - 2^d \mu) - 1$  e  $\alpha V_0$  é o apetite do centro 0. A última desigualdade

é obtida ao usar a Proposição 4.2 no primeiro termo e o Lema 3.4 no segundo termo com  $g(x) = [x - 1 - \log(x)]/x$ . Sem perda de generalidade, suponha-se  $M > (e - 1)\sigma^2(\lceil K \rceil + 1)/v$ ; com  $M$  assim definida, o logaritmo no primeiro termo da desigualdade (4.4) é maior que 1. Assim, continuando com a desigualdade anterior,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[R^* > r] &\leq e^{v/M - \lceil v/M + K\sigma^2/M^2 \rceil} + e^{-c_1 r^d} \\ &\leq e^{-\pi_d \sigma^2 r^d / M^2} + e^{-c_1 r^d} \\ &\leq e^{-c_2 r^d} \\ &\leq 2e^{-c_3 r^d}. \end{aligned}$$

onde  $c_2 = c_2(d) > \pi_d \sigma^2 / M^2$  e  $c_3 = \min\{c_2, c_1\}$ .

□

### 4.3 Cota supercrítica

Nesta seção vai-se provar o seguinte Teorema:

**Teorema 4.4 (Cota superior supercrítica).** Seja  $\Pi$  um processo de Poisson com intensidade  $\lambda = 1$  e seja  $V$  uma v.a. com variância  $\sigma^2 < \infty$ . Se  $\mathbf{E}\alpha V > 1$  tem-se que  $\mathbf{E}X^d < \infty$ .

Para provar-o vai-se precisar de vários conceitos e resultados que se mostraram a continuação:

**Definição 4.1 (Conjunto benigno).** Chama-se um conjunto de centros  $\Xi$  de **benigno** se

- (i)  $\Xi$  tem uma única alocação estável  $\mathcal{L}$ -q.c.
- (ii)  $\Xi$  tem uma única alocação canônica, que vai se notar como  $\overline{\psi}_\Xi$ .

Pelos Teoremas 2.1, 2.2 e a Proposição 2.4, para todo processo ergódico  $\Pi$  com lei  $\mathbf{P}$ , sabemos que  $[\Pi]$  é um conjunto benigno  $\mathbf{P}$ -q.c. Ainda mais, pelas Proposições 2.5 e 2.6, se  $\Xi$  é benigno então  $\bar{\psi}_\Xi$  tem todos os seus territórios abertos, o conjunto de lugares não reclamados aberto e  $\bar{\psi}_\Xi$  é o único *minimizer* do conjunto  $\psi^{-1}(\Delta)$  na classe de alocações estáveis  $\psi$  de  $\Xi$ .

Para o conjunto de centros  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  e  $\Xi$  escreve-se  $\Xi \Rightarrow \Xi$  se para todo conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^d$ , existe  $N$  tal que para  $n > N$  tem-se  $\Xi_n \cap K = \Xi \cap K$ . Para as alocações  $\psi_1, \psi_2, \dots$  e  $\psi$  escreve-se que,  $\mathbf{P}$ -q.c.,  $\psi_n \rightarrow \psi$  se para  $\mathcal{L}$ -q.t.  $x \in \mathbb{R}^d$  tem-se que  $\psi_n(x) = \psi(x)$  na compactificação por um ponto  $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ . O seguinte teorema, foi provado em [8] e vai ser necessário mais para o frente:

**Teorema 4.5 (Continuidade).** Fixe-se uma realização do apetite  $\alpha V$  para cada centro. Sejam  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  e  $\Xi$  conjuntos de centros benignos e notem-se suas alocações canônicas  $\psi_n = \bar{\psi}_{\Xi_n}$  e  $\psi = \bar{\psi}_\Xi$ . Se  $\Xi_n \Rightarrow \Xi$  então  $\psi_n \rightarrow \psi$ ,  $\mathbf{P}$ -q.c. Ainda mais, se  $\psi(z) = \xi \in \Xi$  e  $z$  não é equidistante a dois centros, então  $\psi_n(z) \rightarrow \xi$ .

Dado um conjunto benigno  $\Xi \subset \mathbb{R}^d$  e um conjunto mensurável  $A \subset \mathbb{R}^d$ , seja  $\Xi'_A$  um conjunto aleatório de centros que é a união de  $\Xi \cap A$  e um processo de Poisson com intensidade  $\lambda$  em  $\mathbb{R}^d \setminus A$ . Seja  $\mu_{\lambda, A}$  a lei de  $\Xi'_A$  e seja  $Q(L) := [-L, L]^d$ .

**Definição 4.2 (Conjunto decisivo).** Dado um conjunto benigno  $\Xi$ , diz-se que um conjunto mensurável  $A \subset \mathbb{R}^d$  é  $\Xi$ -**decisivo** para um lugar  $x$  se para todo  $\lambda \in (0, \infty)$  tem-se que,  $\mu_{\lambda, A}$ -q.c.,  $\Xi'_A$  é benigno e  $\psi_{\Xi'_A}(x) = \psi_\Xi(x)$ .

Segundo a definição, quando o conjunto é decisivo,  $\psi(x)$  pode-se determinar só ao mirar  $\Xi \cap A$ . Assim, se  $A$  é  $\Pi$ -**decisivo** para  $x$ , então  $\psi_\Xi(x)$  não pode ser um centro fora de  $A$ .

**Lema 4.5.** Seja  $\mathbf{E}^* \alpha V = 1$  e seja  $\Pi$  um processo de Poisson de intensidade  $\lambda \geq 1$ . Então,  $\mathbf{P}$ -q.c., existe  $L < \infty$  tal que  $Q(L)$  é  $[\Pi]$ -decisivo para 0.

*Demonstração.* Como  $\lambda \geq 1$ , pelo Teorema 2.3 0 é reclamado  $\mathbf{P}$ -q.c. e 0 não é equidistante de dois centros  $\mathcal{L}$ -q.c. No complementar do evento do Lema, para todo  $L$  existe um conjunto benigno  $\Xi_L$  que coincide com  $[\Pi]$  em  $Q(L)$  tal que  $\psi_{\Xi_L}(0) \neq \psi_{[\Pi]}(0)$ . Mas, pelo Teorema 4.5, tem-se que  $\psi_{\Xi_L} \rightarrow \psi_{[\Pi]}(0)$ , uma contradição.  $\square$

**Corolário 4.5.1 (Cubos decisivos).** Seja  $\mathbf{E}\alpha V = 1$  e seja  $\Pi$  um processo de Poisson de intensidade  $\lambda \geq 1$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $M < \infty$  tal que

$$\mathbf{E}\mathcal{L}[x \in Q(M) : Q(M) \text{ não é } [\Pi]\text{-decisivo para } x] < \varepsilon(2M)^d.$$

*Demonstração.* Fixe-se  $\varepsilon > 0$ . Seja  $U^L$  o conjunto aleatório de lugares  $x$  para os quais  $Q(L) + x$  não é  $[\Pi]$ -decisivo. Então o processo  $U^L$  é invariante por translações em lei e, pelo Lema 4.5, pode-se fixar  $L$  grande o suficiente para que tenha intensidade menor que  $\varepsilon/2$ . Agora, ao fixar  $M$  grande o suficiente, então

$$\mathbf{E}\mathcal{L}[U^L \cap Q(M)] < (\varepsilon/2)(2M)^d$$

logo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathcal{L}[x \in Q(M) : Q(M) \text{ não é } [\Pi]\text{-decisivo para } x] \\ < (\varepsilon/2)(2M)^d + (2M)^d - (2M - 2L)^d \end{aligned}$$

que é menor que  $\varepsilon(2M)^d$  quando  $M$  é grande o suficiente.  $\square$

**Lema 4.6 (Desigualdade de Chernoff).** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a. *iid* e seja  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , então

(i)

$$\mathbf{P}[S_n \geq a] \leq \min_{t>0} \frac{\prod_i \mathbf{E}[e^{tX_i}]}{e^{ta}}.$$

(ii)

$$\mathbf{P}[S_n \leq a] \leq \min_{t>0} e^{ta} \prod_i \mathbf{E}[e^{-tX_i}]$$

*Demonstração.* Prova da parte (i):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[S_n \geq a] &= \mathbf{P}[e^{tS_n} \geq e^{ta}] \\ &\leq \frac{\mathbf{E}[e^{tS_n}]}{e^{ta}} \\ &= \frac{\prod_i \mathbf{E}[e^{tX_i}]}{e^{ta}} \\ &\leq \min_{t>0} \frac{\prod_i \mathbf{E}[e^{tX_i}]}{e^{ta}}. \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é obtida pela desigualdade de Chebyshev. A prova da parte (ii) segue o mesmo raciocínio:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[S_n \leq a] &= \mathbf{P}[e^{-tS_n} \geq e^{-ta}] \\ &\leq \min_{t>0} e^{ta} \prod_i \mathbf{E}[e^{-tX_i}]. \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.6.** Seja  $\Pi$  um processo de Poisson com intensidade  $\lambda$  e seja  $V$  uma v.a. com distribuição  $F$ , média  $\mu = \alpha^{-1}$  (logo  $\mathbf{E}\alpha V = 1$ ) e variância  $\sigma^2$ . Então para qualquer  $\lambda > 1$  existe  $c \in (0, \infty)$  tal que para todo  $r > 0$

$$\mathbf{P}[X > r] < cr^{-d}.$$

*Demonstração do Teorema 4.6.* Observe-se primeiro que se

$$\text{existe } \xi \in [\Pi] \cap B(0, r) \text{ com } \mathcal{L}[\Psi^{-1}(\xi) \cap B(0, 2r)] < \alpha V_\xi \quad (4.5)$$

então  $X \leq r$ . Porque se  $X > r$ ,  $\xi$  cobiça ao 0 e 0 deseja ao  $\xi$ , assim  $(0, \xi)$  seria instável. Logo

$$\mathbf{P}[X > r] \leq \mathbf{P}[\mathcal{L}[\Psi^{-1}(\xi) \cap B(0, 2r)] = \alpha V_\xi \text{ para todo } \xi \in [\Pi] \cap B(0, r)].$$

Assim, é suficiente provar que o complementar do evento na direita da desigualdade anterior tem decaimento polinomial em  $r$ . Dado  $\lambda$  seja

$$\varepsilon = \frac{\lambda - 1}{10 \cdot 2^d} \wedge 1$$

e seja  $M = M(\lambda, \varepsilon)$  como no Corolário 4.5.1. Note-se que  $\varepsilon$  e  $M$  não dependem de  $r$ .

Para qualquer  $r > 0$  vão-se situar cubos disjuntos  $Q(M)$  em  $B(0, 2r) \setminus B(0, r)$ . Para  $z \in \mathbb{Z}^d$  define-se  $Q_z = Q(M) + 2Mz$  e defina-se a v.a.

$$Y_z = \mathcal{L}(x \in Q_z : Q_z \text{ não é } [\Pi]\text{-decisivo para } x).$$

Seja

$$I = I(r) = \{z \in \mathbb{Z}^d : Q_z \subset B(0, 2r) \setminus B(0, r)\}$$

o conjunto índice dos cubos que estão completamente dentro da casca e seja

$$S = S(r) = [B(0, 2r) \setminus B(0, r)] \setminus \bigcup_{z \in I} Q_z$$

o complementar na casca. Observe-se que si  $r$  é grande o suficiente então

$$\mathcal{L}S < \varepsilon \pi_d r^d, \tag{4.6}$$

onde  $\pi_d$  é o volume da bola de raio 1 em  $d$  dimensões. Considerem-se também os seguintes eventos:

$$E = \left\{ \sum_{\xi \in B(0,r)} \alpha V_\xi > (\lambda - \varepsilon) \pi_d r^d \right\};$$

$$G = \left\{ \sum_{z \in I} Y_z < 4\varepsilon 2^d \pi_d r^d \right\}.$$

Agora, suponha-se que  $E$  e  $G$  ocorrem, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x \in B(0, 2r) : \Psi(x) \in B(0, r)] &\leq \sum_{z \in I} Y_z + \pi_d r^d + \mathcal{L}S \\ &\leq (4\varepsilon 2^d + 1 + \varepsilon) \pi_d r^d \\ &< (\lambda - \varepsilon) \pi_d r^d \\ &< \sum_{\xi \in B(0,r)} \alpha V_\xi, \end{aligned}$$

logo se cumpre o evento descrito em 4.5. Assim, é suficiente estudar as caudas de  $\mathbf{P}[E^C]$  e  $\mathbf{P}[G^C]$  para concluir que o decaimento de  $X$  será ao menos aquele da cauda mais pesada entre os dois eventos. Para  $G^C$  note-se que, pelo Corolário 4.5.1, as v.a.  $(Y_z)_{z \in I}$  são *idd* com média menor que  $\varepsilon(2M)^d$ . Assim, obtém-se que

$$(\#I)(2M)^d \leq \pi_d 2^d r^d < 2 \cdot 2^d \pi_d r^d$$

logo

$$\mathbf{E} \left( \sum_{z \in I} Y_z \right) \leq (\#I) \varepsilon (2M)^d < 2\varepsilon 2^d \pi_d r^d.$$

Ainda mais, cada v.a.  $Y_z$  está limitada por  $(2M)^d$ . Assim, ao aplicar a desigualdade de Chernoff (Lema 4.6), obtém-se que  $\mathbf{P}(G^C)$  tem decaimento exponencial em  $r^d$ .

Seja  $V'_k = V_k - \mu$  para  $k = 1, \dots, K$ ,  $K = \lambda\pi_d r^d - 1$  e onde cada  $V_k$  tem a mesma distribuição de  $V$ . Seja  $v = (\lambda - \varepsilon)\pi_d r^d \alpha^{-1} - K\mu = \alpha^{-1}[\pi_d r^d(\lambda - \varepsilon - 1) - 1]$  porque a média de  $V$  é  $\alpha^{-1}$ . Finalmente, seja  $N$  uma v.a. com distribuição de Poisson e intensidade  $\lambda\pi_d r^d$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[E^C] &= \mathbf{P}\left[\sum_{\xi \in B(0,r)} V_\xi \leq (\lambda - \varepsilon)\pi_d r^d \alpha^{-1}\right] \\ &= \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N V_i \leq (\lambda - \varepsilon)\pi_d r^d \alpha^{-1} \mid N \geq K\right] \mathbf{P}[N \geq K] + \mathbf{P}[N < K] \\ &\leq \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{\lfloor K \rfloor} V_i \leq (\lambda - \varepsilon)\pi_d r^d \alpha^{-1}\right] \mathbf{P}[N \geq K] + \mathbf{P}[N < K] \\ &\leq \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{\lfloor K \rfloor} -V'_i \geq -v\right] + \mathbf{P}[N < K]. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Chernoff (3.5) no Lema 3.4 obtém-se para o segundo termo na última desigualdade que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[N < K] &\leq e^{-\lambda\pi_d r^d g(\lambda\pi_d r^d / K)} \\ &\leq e^{-c_1 r^d} \end{aligned} \tag{4.7}$$

para alguma constante  $c_1 > 0$ . E para o primeiro termo, usando o resultado de Nagaev na Proposição 4.1,

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{\lfloor K \rfloor} -V'_i \geq -v\right] \leq \frac{4\lfloor K \rfloor A_2^+}{v^2} + \exp\left\{\frac{-8v^2}{\lfloor K \rfloor e^2 \sigma^2}\right\} \tag{4.8}$$

$$\leq c_3 r^{-d} + e^{-c_2 r^d}. \quad (4.9)$$

Logo de (4.7) e (4.8) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} [E^C] &\leq c_3 r^{-d} + e^{-c_2 r^d} + e^{-c_3 r^d} \\ &\leq c_4 r^{-d}. \end{aligned}$$

□

*Demonstração do Teorema 4.4.* Ao re-escalar  $\mathbb{R}^d$  o resultado requerido é equivalente à mesma declaração com  $\mathbf{E}\alpha V = 1$  e  $\lambda > 1$ , logo o resultado segue-se do Teorema 4.6.

□

## 4.4 Cota subcrítica

Nesta seção vai se provar o seguinte Teorema

**Teorema 4.7.** Seja  $\Pi$  um processo de Poisson com intensidade  $\lambda = 1$ . Seja  $l \in \mathbb{R}^+$  e seja  $V$  uma v.a. positiva tal que  $V \leq l$ ,  $\mathbf{F}$ -q.c. Chamem-se  $\mu$  e  $\sigma^2$  a média e a variância de  $V$ , respectivamente. Então quando  $\mathbf{E}\alpha V < 1$  ( $\mu < \alpha^{-1}$ ) tem-se que  $\mathbf{E}^*(R^*)^d < \infty$ .

Vão se precisar os seguintes conceitos e resultados para prová-lo:

Dado um conjunto benigno de centros  $\Xi$  tal como foi definido na página 60 e um conjunto mensurável  $A \subset \mathbb{R}^d$ , seja  $\Xi'_A$  um conjunto aleatório de centros que é a união de  $\Xi \cap A$  e um processo de Poisson com intensidade  $\lambda$  em  $\mathbb{R}^d \setminus A$ . Seja  $\mu_{\lambda,A}$  a lei de  $\Xi'_A$ .

**Definição 4.3 (Conjunto cheio).** Dado um conjunto benigno  $\Xi$ , diz-se que um conjunto mensurável  $A \subset \mathbb{R}^d$  é  $\Xi$ -**cheio** para um lugar  $x$  se para todo  $\lambda \in (0, \infty)$  tem-se que,  $\mu_{\lambda,A}$ -q.c.,  $\Xi'_A$  é benigno e  $\mathcal{L} \left( \psi_{\Xi'_A}^{-1}(\xi) \cap A \right) = 1$ .

Em palavras,  $A$  é  $\Xi$ -cheio para  $\xi$  quando  $\xi$  fica satisfeito dentro do conjunto  $A$ , independente do que aconteça em  $A^C$ .

**Lema 4.7.** Suponha que,  $\mathbf{P}$ -q.c.,  $\Xi_n \Rightarrow \Xi$  e  $\psi_n \rightarrow \psi$  como no Teorema 4.5. Se existe um conjunto  $A$  de volume positivo tal que todo  $z \in A$  deseja ao  $\xi$  quando a função de alocação é  $\psi$ , então para  $n$  grande o suficiente  $\xi$  está satisfeito para a função de alocação  $\psi_n$  e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} R_{\psi_n}(\xi) \leq \text{ess inf}_{z \in A} |z - \xi| < \infty$$

*Demonstração.* Como o conjunto  $A$  tem medida de Lebesgue positiva, o Teorema 4.5 implica que existe  $z \in A$  tal que  $\psi_n(z) \rightarrow \psi(z)$ . Logo, para  $n$  grande o suficiente,  $z$  deseja ao  $\xi$  quando a função de alocação é  $\psi_n$ . Como a alocação é estável,  $\xi$  não cobiça ao  $z$ , logo obtém-se o resultado.  $\square$

**Lema 4.8.** Seja  $\mathbf{E}\alpha V = 1$  e seja  $\Pi$  um processo de Poisson com intensidade  $\lambda \leq 1$ . Seja  $G$  o evento tal que para todo  $\xi \in [\Pi]$  existe  $L < \infty$  para o qual  $\xi + Q(L)$  é  $[\Pi]$ -cheio para  $\xi$ . Então  $\mathbf{P}(G) = 1$ .

*Demonstração.* Em  $G^C$  existe um centro  $\xi \in [\Pi]$  tal que para todo  $L$  existe um conjunto benigno de centros  $\Xi_L$  que coincide com  $[\Pi]$  em  $\xi + Q(L)$  e que satisfaz

$$\mathcal{L}(\psi_{\Xi_L}^{-1} \cap (\xi + Q(L))) < 1 \quad (4.10)$$

para todo  $L$ . Suponha-se  $\mathbf{P}(G^C) > 0$  e seja  $\psi_L = \psi_{\psi_L}$ . Como  $\Xi_L \Rightarrow [\Pi]$ , o Teorema 4.5 implica que  $\psi_L \rightarrow \psi_{[\Pi]}$ ,  $\mathbf{P}$ -q.c. Ainda mais, o Lema 4.7 aplica para  $\xi$  (pelo Teorema 2.3), logo,  $\mathbf{P}$ -q.c., para  $L$  grande o suficiente,  $\xi$  está satisfeito em cada  $\psi_L$  e os raios  $R_{\psi_L}(\xi)$  são limitados quando  $L \rightarrow \infty$  o qual contradiz 4.10. Logo  $\mathbf{P}(G^C) = 0$ .  $\square$

**Corolário 4.7.1.** Seja  $\mathbf{E}\alpha V = 1$  e seja  $\Pi$  um processo de Poisson com intensidade  $\lambda \leq 1$ . Para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $M$  tal que

$$\mathbf{E}\#\{\xi \in [\Pi] \cap Q(M) : Q(M) \text{ não é } [\Pi]\text{-cheio para } \xi\} < \varepsilon(2M)^d.$$

*Demonstração.* Para  $A \subset \mathbb{R}^d$  seja  $\Pi^L(A)$  o número de  $\xi \in [\Pi] \cap A$  tais que  $\xi + Q(L)$  não é  $[\Pi]$ -cheio para  $\xi$ . O Lema 4.8 e o teorema de convergência monótona implicam que  $\mathbf{E}\Pi^L(Q(1)) \rightarrow 0$  quando  $L \rightarrow \infty$ . Logo pode-se escolher um  $L < \infty$  de modo que o processo pontual  $\Pi^L$  invariante por translações tem intensidade menor que  $\varepsilon/2$ . Veja-se que para  $M > L$  e  $\xi \in [\Pi] \cap Q(M - L)$ , se  $Q(M)$  não é  $[\Pi]$ -cheio para  $\xi$ , então  $\xi \in [\Pi^L]$ . Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\#\{\xi \in [\Pi] \cap Q(M) \text{ não é } [\Pi]\text{-cheio para } \xi\} \\ < (\varepsilon/2)(2M - 2L)^d + (2M)^d - (2M - 2L)^d \end{aligned}$$

e o último termo é menor que  $\varepsilon(2M)^d$  para  $M$  grande o suficiente.  $\square$

**Teorema 4.8.** Seja  $l \in \mathbb{R}^+$  e seja  $V$  uma v.a. positiva tal que  $V \leq l$ , q.c. Chamem-se  $\mu$  e  $\sigma^2$  a média e a variância de  $V$ , respectivamente. Seja  $\mathbf{E}\alpha V = 1$  (logo  $\mu = \alpha^{-1}$ ) e seja  $\Pi$  um processo de Poisson de intensidade  $\lambda < 1$ . Então existe  $c > 0$  tal que para todo  $r > 0$

$$\mathbf{P}[\text{existe } \xi \in [\Pi] \cap B(0, 1) \text{ tal que } R(\xi) > r] < cr^{-d}.$$

*Demonstração.* Fixe-se  $\lambda < 1$  e note-se que se

$$\text{existe } y \in B(0, r) \text{ com } \Psi(y) \notin B(0, 2r + 1) \quad (4.11)$$

então  $R(\xi) < r + 1$  para todo  $\xi \in [\Pi] \cap B(0, 1)$ . Em um outro caso teria-se que  $|y - \xi| < r + 1$  e  $|y - \Psi(y)| > r + 1$  e assim  $(y, \xi)$  seria instável. Logo

é suficiente estudar a cauda na probabilidade do evento enunciado em 4.11. Seja  $\varepsilon = (1 - \lambda)/(10 \cdot 2^d)$  e seja  $M = M(\lambda, \varepsilon)$  como no Corolário 4.7.1. Note-se que  $\varepsilon$  e  $M$  não dependem de  $r$ .

Agora para todo  $r > 0$  vão-se situar copias disjuntas do cubo  $Q(M)$  na casca  $B(0, 2r + 1) \setminus B(0, r)$ . Para  $z \in \mathbb{Z}^d$  seja  $Q_z = Q(M) + 2Mz$  e defina-se a v.a.

$$W_z = \left\{ \sum_{\xi \in [\Pi] \cap Q_z} V_\xi : Q_z \text{ não é } [\Pi]\text{-cheio para } \xi \right\}.$$

Seja

$$I = I(r) = \#\{z \in \mathbb{Z}^d : Q_z \subset B(0, 2r + 1) \setminus B(0, r)\}$$

o conjunto indicador dos cubos que estão contidos na bola, e seja

$$S = S(r) = [B(0, 2r + 1) \setminus B(0, r)] \setminus \bigcup_{z \in I} Q_z \quad (4.12)$$

a parte restante da casca. Considerem-se os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \sum_{\xi \in B(0, r)} V_\xi < (\lambda + \varepsilon)\pi_d r^d \right\} \\ F &= \left\{ \sum_{\xi \in S} V_\xi < \varepsilon\pi_d r^d \right\} \\ G &= \left\{ \sum_{z \in I} W_z < 4\varepsilon 2^d \pi_d r^d \right\}. \end{aligned}$$

Em  $E$  tem-se que

$$\mathcal{L}\{y \in B(0, r) : \psi(y) \notin B(0, r)\} \geq \pi_d r^d - \sum_{\xi \in B(0, r)} V_\xi$$

$$\begin{aligned} &\geq \pi_d r^d - (\lambda + \varepsilon) \pi_d r^d \\ &\geq 9\varepsilon 2^d \pi_d r^d, \end{aligned}$$

onde a terça desigualdade obtém-se pela escolha de  $\varepsilon$ . Em  $F$  tem-se:

$$\mathcal{L}\{y \in B(0, r) : \psi(y) \in S\} < \sum_{\xi \in S} V_\xi < \varepsilon \pi_d r^d$$

e em  $G$ , pela definição de conjunto cheio, tem-se

$$\mathcal{L}\{y \in B(0, r) : \psi(y) \in \cup_{z \in I} Q_z\} \leq \sum_{z \in I} W_z < 4\varepsilon 2^d \pi_d r^d.$$

Como  $B(0, 2r + 1) = S \cup B(0, r) \cup \cup_{z \in I} Q_z$ , tem-se em  $E \cap F \cap G$  que

$$\mathcal{L}\{y \in B(0, r) : \psi(y) \notin B(0, 2r + 1)\} \geq (9\varepsilon 2^d - 4\varepsilon 2^d - \varepsilon) \mathcal{L}B(0, r) > 0,$$

logo quando  $E$ ,  $F$  e  $G$  ocorrem, o evento em (4.11) também ocorre. Assim, é suficiente estudar o decaimento em  $\mathbf{P}[E^C]$ ,  $\mathbf{P}[F^C]$  e  $\mathbf{P}[G^C]$ . Vai-se analisar primeiro o decaimento de  $G^C$ . Note-se que

$$(\#I)(2M)^d \geq \pi_d (2r + 1)^d \leq 2 \cdot 2^d \pi_d r^d \quad (4.13)$$

logo

$$\mathbf{E} \left( \sum_{z \in I} W_z \right) \leq (\#I) \varepsilon (2M)^d \leq 2\varepsilon 2^d \pi_d r^d.$$

Ainda mais, tem-se que  $W_z \leq \sum_{\xi \in Q_z} V_\xi \leq lN$ , onde  $N \sim \mathcal{P}(\lambda Q_z)$ . Logo pela desigualdade de Chernoff (Lema 4.6),  $\mathbf{P}[G^C]$  tem decaimento exponencial em

$r^d$ .

Vai-se analisar agora a cauda na distribuição de  $\mathbf{P}[E^C]$ . Seja  $N' \sim \mathcal{P}(\lambda\pi_d r^d)$ . Seja  $V'_i = V_i - \mu$ ;  $v = (\lambda + \varepsilon)\pi_d r^d - K\mu$  onde  $K = \lceil \lambda\pi_d r^d \rceil$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[E^C] &= \mathbf{P} \left[ \sum_{\xi \in B(0,r)} V_\xi \geq (\lambda + \varepsilon)\pi_d r^d \right] \\ &= \mathbf{P} \left[ \sum_{i=1}^{N'} V_i \geq (\lambda + \varepsilon)\pi_d r^d \mid N \leq K \right] \mathbf{P}[N' \leq K] + \mathbf{P}[N' > K] \\ &\leq \mathbf{P} \left[ \sum_{i=1}^K V'_i \geq v \right] + \mathbf{P}[N' > K]. \end{aligned}$$

O segundo termo, pela desigualdade de Chernoff no Lema 3.4, está limitado por  $e^{-c_1 r^d}$ , onde  $c_1 = c_1(\lambda, d) > 0$ . O primeiro termo, pela Proposição 4.1, pode-se limitar assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left[ \sum_{i=1}^K V'_i \geq v \right] &\leq \frac{4\lceil K \rceil A_2^+}{v^2} + \exp \left\{ \frac{-8v^2}{\lceil K \rceil e^2 \sigma^2} \right\} \\ &\leq c_2 r^{-d} + e^{-c_3 r^d}. \end{aligned}$$

Logo obtém-se que  $\mathbf{P}[E^C]$  decresce com cauda polinomial em  $r^{-d}$ . Uma análise idêntica mostrara que  $\mathbf{P}[F^C]$  tem o mesmo decrescimento o qual prova o teorema. □

*Demonstração do Teorema 4.7.* Primeiro note-se que ao re-escalar  $\mathbb{R}^d$  é suficiente provar a declaração para  $\mathbf{E}\alpha V = 1$  e  $\lambda < 1$ . Seja  $Y$  o número de centros  $\xi$  em  $[\Pi] \cap B(0, 1)$  tais que  $R(\xi) > r$ . Então por propriedade do processo de Palm tem-se que  $\mathbf{E}Y = \lambda\pi_d \mathbf{P}^*[R^* > r]$ . Logo é suficiente provar que  $\mathbf{E}Y$  tem decaimento polinomial em  $r^d$ . Seja  $u = r^d/2$ . Note-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y &= \mathbf{E}[Y; 0 < Y \leq u] + \mathbf{E}[Y; Y > u] \\ &\leq u\mathbf{P}[Y > 0] + \mathbf{E}[\Pi(B(0, 1)); \Pi(B(0, 1)) > u]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.8 tem-se que  $\mathbf{P}[Y > 0]$  está limitado por  $Cr^{-d}$ . O segundo termo está limitado por  $\mathbf{E}(\Pi(B(0,1))^2)/u$ . Logo os dois termos têm decaimento polinomial em  $r^d$  o qual implica que  $\mathbf{E}Y$  tem decaimento polinomial em  $r^d$ .

□

# Bibliografia

- [1] S. Chatterjee, R. Peled, Y. Peres, and D. Romik. Phase transitions in gravitational allocations. *Preprint*.
- [2] S. Chatterjee, R. Peled, Y. Peres, and D. Romik. Gravitational allocation to poisson points. *Annals of Mathematics*, Aceito para publicação.
- [3] M.V. Freire, S. Popov, and M. Vachkovskaia. Percolation for the stable marriage of Poisson and Lebesgue. *Stochastic Processes and their Applications*, 117(4):514–525, April 2007.
- [4] D. Gale and L. Shapley. College admissions and stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, 69:9–15, 1962.
- [5] J.B. Gouéré. Subcritical regimes in the poisson boolean model of continuum percolation. *Annals of Probability*, 36(4):1209–1220, July 2008.
- [6] J.B. Gouéré. Subcritical regimes in some models of continuum percolation. *Annals of Applied Probability*, Aceito para publicação.
- [7] C. Hoffman, A.E. Holroyd, and Y. Peres. A stable marriage of poisson and lebesgue. *Annals of Probability*, 34(4):1241–1272, 2006.
- [8] C. Hoffman, A.E. Holroyd, and Y. Peres. Tail bounds for the stable marriage of poisson an lebesgue. *Canadian Journal of Mathematics*, Aceito para publicação.
- [9] A.E. Holroyd and T.M. Liggett. How to find an extra head: Optimal random shifts of bernoulli and poisson random fields. *Annals of Probability*, 29(4):1405–1425, 2001.
- [10] A.E. Holroyd, R. Pemantle, Y. Peres, and O. Schramm. Poisson matching. *Annales de l’Institut Henry Poincare (B)*, Aceito para publicação.

- [11] A.E. Holroyd and Y. Peres. Extra heads and invariant allocations. *Annals of Probability*, 33(1):31–52, 2005.
- [12] M. Krikun. Connected allocation to poisson points in  $R^2$ . *Electronic Communications in Probability*, 12:140–145, 2007.
- [13] T.M. Liggett. Tagged particle distributions or how to choose a head at random. In V. Sidoravicious, editor, *In and Out of Equilibrium*, pages 133–162. Birkhäuser, 2002.
- [14] R. Meester and R. Roy. *Continuum Percolation*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
- [15] S.V. Nagaev. Large deviations os sums of independent random variables. *Annals of Probability*, 7(5):745–789, 1979.
- [16] S. Robinson. Intriguing mathematical picture merits second look. *SIAM News*, 38(6), 2005.
- [17] H. Thorisson. Transforming elements and shifting random fields. *Annals of Probability*, 24(4):2057–2064, 1996.
- [18] H. Thorisson. *Coupling, Stationarity and Regeneration*. Probability and its Applications. Springer-Verlag, 2000.